Окружность и круг. Вписанные и описанные многоугольники.

Примеры решения задач.

1) Метрические соотношения в круге.

а) К окружности, радиус которой равен 5см, из точки, удаленной от центра на 13см, проведена секущая, которая делится окружностью пополам. Найти длину секущей.

б) Касательная и секущая, проведенные из одной точки к окружности, соответственно равны 20см и 40см. Секущая удалена от центра на 8см. Найти диаметр.

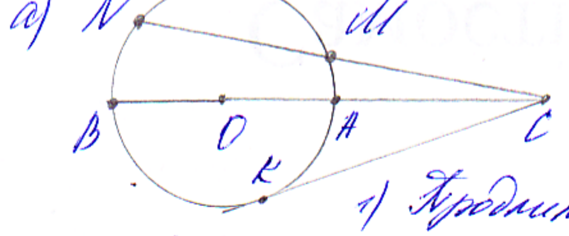
в) В окружности проведены две пересекающиеся хорды. Одна из них точкой пересечения делится на отрезки 4см и 6см. Найти больший из отрезков, на которые точкой пересечения делится другая хорда, если ее длина 11см.

г) Из одной точки к окружности проведены две касательные. Длина каждой из них 13см, а расстояние между точками касания 10см. Найти радиус окружности.

д) Длина хорды в круге равна 12см. В одном из концов этой хорды проведена касательная, расстояние до которой от другого конца хорды равно 8см. Найти радиус круга.

е) Две окружности радиусами 3см и 1см касаются внешним образом. Найти расстояние от точки касания окружностей до их общей касательной.

Решение:

а) 

Дано: окружность, $OA=R=5$см, $CO=13$см, CN - секущая, $CM=MN$.
Найти: CN.

1) Продлим CO до пересечения с окружностью $OB=OA$ (как радиусы). $BC=OB+CO=13+5=18$см. $AC=CO-OA=13-5=8$см.
Проведем касательную ~~AK~~ CK

2) Для секущей BC и касательной CK по свойству секущей и касательной получим: $\frac{BC}{CK}=\frac{CK}{AC} \Rightarrow CK^2=BC\cdot AC$.

3) Пусть $CM=x$, тогда $CN=2x$. Для секущей CN и касательной ~~A~~CK получим: $\frac{CN}{CK}=\frac{CK}{CM} \Rightarrow CK^2=CN\cdot CM$.

Приравняв результаты 2-го и 3-го пунктов, получим:

$BC \cdot AC = CN \cdot CM$.

$2x \cdot x = 18 \cdot 8$

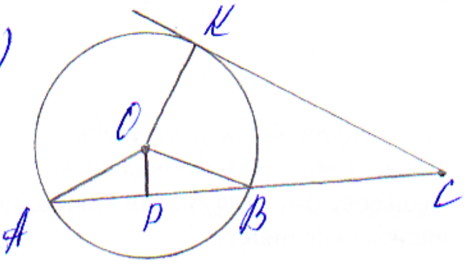
$2x^2 = 144$

$x^2 = 72$

$x = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

$CN = 2x = 12\sqrt{2}$ см.

б)



Дано: окружность. AC - секущая, CK - касательная $CK = 20$см, $AC = 40$см. $OP = 8$см.

Найти: OA

1) Для секущей AC и касательной CK по свойству секущей и касательной получим: $\frac{AC}{CK} = \frac{CK}{BC} \Rightarrow BC = \frac{CK^2}{AC} = \frac{400}{40} = 10$см.

$AC = AB + BC \Rightarrow AB = AC - BC = 40 - 10 = 30$см.

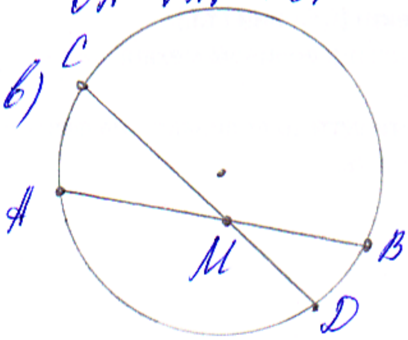
2) ΔABO - равнобедренный (т.к. $AO = BO$ - как радиусы)

OP - высота и медиана. $AP = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15$см.

3) ΔAOP - прямоугольный: $OA^2 = AP^2 + OP^2$ (th. Пифагора)

$OA = \sqrt{AP^2 + OP^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$см.

в)



Дано: окружность, AB, CD - хорды.

$CD = 11$см, $AM = 6$см, $BM = 4$см.

Найти: CM.

Пусть $CM = x$, тогда $MD = CD - CM = 11 - x$.

По свойству пересекающихся хорд имеем:

$AB \cdot BM = CM \cdot MD$

$6 \cdot 4 = x(11 - x)$

$11x - x^2 = 24$

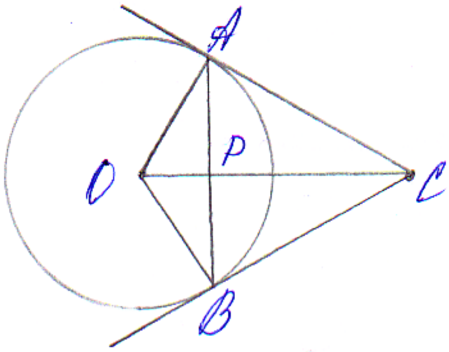
$-x^2 + 11x - 24 = 0$

$x^2 - 11x + 24 = 0$

$x_1 = 8$

$x_2 = 3$

Т.к. $x_1 + x_2 = 11 = CD$, то $CM = 8$см, $MD = 3$см (возможно и наоборот).

г) 

Дано: окружность, AC, BC - касательные
$AC = 13$ см. $AB = 10$ см.
Найти: OA.

1) $\triangle ABC$ - равнобедренный, т.к. $AC = BC$
CP - высота, медиана; $AP = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$ см.

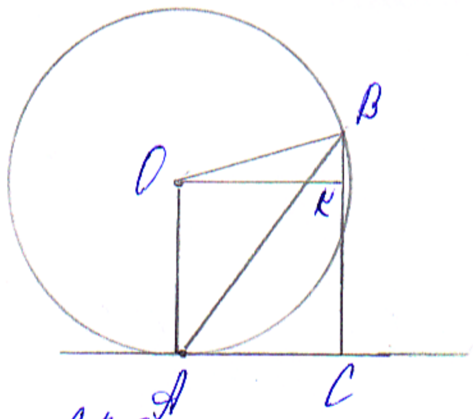
2) $\triangle APC$ - прямоугольный: $AC^2 = AP^2 + CP^2$ (th. Пифагора)
$CP = \sqrt{AC^2 - AP^2} = \sqrt{169 - 25} = 12$ см.

3) $\triangle AOC$ - прямоугольный (т.к. $OA \perp AC$) По свойству катета прямоугольного треугольника получим:

$$\frac{CO}{AC} = \frac{AC}{CP} \Rightarrow CO = \frac{AC^2}{CP} = \frac{169}{12} \text{ см.}$$

По th. Пифагора: $CO^2 = AO^2 + AC^2 \Rightarrow AO = \sqrt{CO^2 - AC^2} =$

$$= \sqrt{\left(\frac{169}{12}\right)^2 - 169} = \sqrt{\frac{169^2 - 169 \cdot 144}{144}} = \sqrt{\frac{169(169-144)}{144}} = \sqrt{\frac{169 \cdot 25}{144}} = \frac{13 \cdot 5}{12} = \frac{65}{12} = 5\frac{5}{12} \text{ см.}$$

д) 

Дано: окружность, AB - хорда, AC - касательная $BC \perp AC$, $BC = 8$ см, $AB = 12$ см
Найти: AO.

1) $\triangle ABC$ - прямоугольный: $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (th. Пифагора)
$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{144 - 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ см.

2) Проведем $OK \perp BC$. Т.к. $ACKO$ - прямоугольник, то $AC = OK = 4\sqrt{5}$ см.
$OA = CK$

3) $\triangle BOK$ - прямоугольный: $OB^2 = OK^2 + BK^2$ (th. Пифагора)
Пусть $OB = x$, $BK = BC - CK = 8 - x$

$x^2 = (8-x)^2 + (4\sqrt{5})^2$

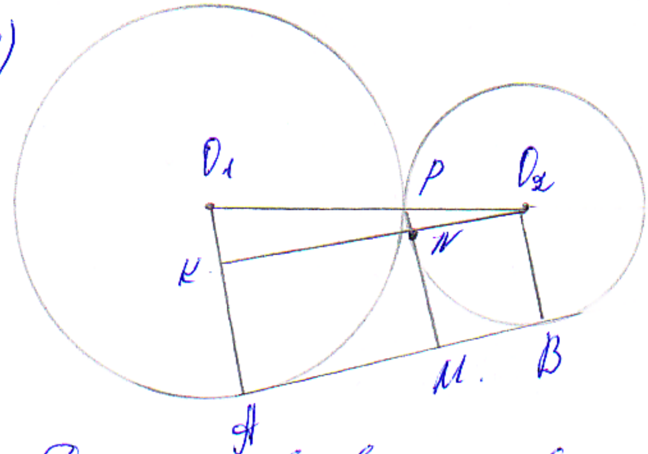
$x^2 = 64 - 16x + x^2 + 80$

$16x = 144$

$x = 9$

$AO = BO = 9$ см.

е)



Дано: 2 окружности, внешнее касание, $AO_1=3$см, $BO_2=1$см

AB – касательная

Найти: PM

1) Проведем $KO_2 \perp AO_1$; ~~Продлим O_1O_2 и AB до пересечения в точке С.~~

$KABO_2$ – прямоугольник ($O_2B \perp AB$; $AO_1 \perp AB$): $AB = KO_2$; $BO_2 = AK = 1$см.

$KO_1 = AO_1 - AK = 3-1 = 2$см. $O_1O_2 = O_1P + O_2P = 3+1 = 4$см.

2) $\triangle O_1O_2K$ – прямоугольный: $O_1O_2^2 = KO_2^2 + KO_1^2$ (Т. Пифагора)

$KO_2 = \sqrt{O_1O_2^2 - KO_1^2} = \sqrt{4^2-2^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$см.

3) $\triangle NPO_2 \sim \triangle KO_1O_2$ (т.к. $\angle KO_2O_1$ – общий). Из подобия получим:

$$\frac{KO_1}{PN} = \frac{O_1O_2}{PO_2} \Rightarrow PN = \frac{PO_2 \cdot KO_1}{O_1O_2} = \frac{1 \cdot 2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ см.}$$

4) $BMNO_2$ – прямоугольник: $BO_2 = MN = 1$см.

$$PM = MN + NP = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{2} \text{ см.}$$

2) Вписанные и описанные треугольники.

а) В прямоугольный треугольник вписана окружность радиусом $\sqrt{3}$ см. Отрезок, соединяющий центр этой окружности и вершину острого угла, образует с катетом угол 30°. Найти площадь треугольника.

б) Найти площадь прямоугольного треугольника, если известно, что точка касания вписанной окружности делит катет на отрезки 6 и 10см, считая от вершины прямого угла.

в) Периметр равнобедренного треугольника 24см, а боковая сторона меньше основания на 1,5см. Чему равен радиус описанной окружности.

г) Центр вписанной в равнобедренный треугольник окружности делит высоту в отношении 17:15, считая от вершины. Найти радиус вписанной окружности, если основание треугольника равно 120см.

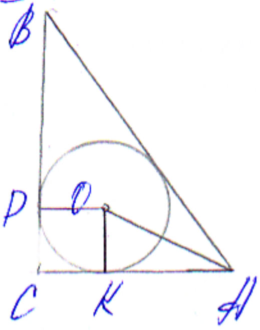
д) Основание равнобедренного треугольника равно 30см, а высота, проведенная к боковой стороне, равна 24см. Чему равен радиус описанной окружности.

е) В треугольник ABC вписана окружность с центром O. Найти сторону AB, если $AO=6$см, $BO=10$см и $\angle C=60^\circ$

ж) Одна из сторон треугольника равна 30см, а другая делится точкой касания вписанной окружности на отрезки длинами 12см и 14см, считая от конца неизвестной стороны. Найти радиус вписанной окружности

Решение

а)



Дано: ΔABC - прямоугольный, вписана окружность, $OK=\sqrt{3}$, $\angle KAO=30^\circ$

Найти: S.

1) Т.к. O-центр вписанной окружности, то AO - биссектриса, $\angle KAO=\angle BAO=30^\circ \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle A=60^\circ$.

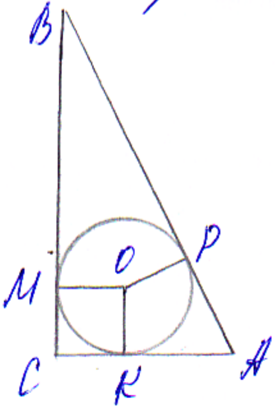
2) ΔAOK - прямоугольный: $tg\angle KAO=\frac{OK}{AK} \Rightarrow AK=\frac{OK}{tg\angle KAO}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=3$см.

$AC=AK+CK=AK+OK=3+\sqrt{3}$ см (т.к. $CKOP$ - квадрат).

3) ΔABC - прямоугольный: $tg\angle A=\frac{BC}{AC} \Rightarrow BC=AC\,tg\angle A=(3+\sqrt{3})\sqrt{3}=$
$=3+3\sqrt{3}$ см.

4) Найдем площадь: $S=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}(3+3\sqrt{3})(3+\sqrt{3})=\frac{1}{2}(9+3\sqrt{3}+9\sqrt{3}+9)=$
$=\frac{1}{2}(18+12\sqrt{3})=9+6\sqrt{3}$ см^2

б)



Дано: ΔABC - прямоугольный, вписана окружность; $CK=6$см, $AK=10$см.

Найти: S.

1) $CM=CK=6$см; $AP=AK=10$см; $BM=BP=x$ (как касательные к окружности проведенные из точек A,B,C).

2) ΔABC - прямоугольный: $AC=CK+AK=6+10=16$см

$BC=CM+BM=6+x$; $AB=AP+BP=10+x$. По th. Пифагора получим:

$AB^2=AC^2+BC^2$: $(10+x)^2=16^2+(6+x)^2$

$100+20x+x^2=256+36+12x+x^2$

$20x-12x=256+36-100$

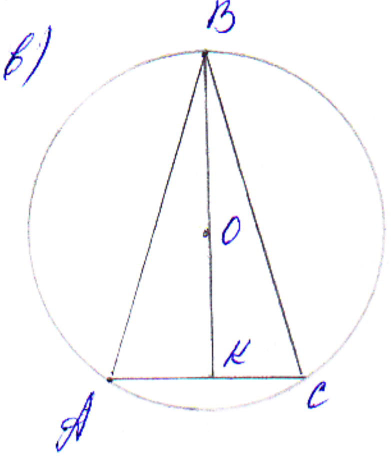
$8x=192$

$x=24$.

$BC = 6+24 = 30$ см

3) Найдем площадь: $S = \frac{1}{2} BC \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 16 = 240$ см^2

в)



Дано: $\triangle ABC$ - равнобедренный, описана окружность, $P_\triangle = 24$ см, $AC - AB = 1{,}5$ см.

Найти: OB.

1) Пусть $AC = x$, тогда $AB = x - 1{,}5$. Т.к. $P = AB + AC + BC = 2AB + AC$, получим:

$x + 2(x - 1{,}5) = 24$

$x + 2x - 3 = 24$

$3x = 27$

$x = 9$

$AC = 9$ см; $AB = 9 - 1{,}5 = 7{,}5$ см.

2) Т.к. $\triangle ABC$ - равнобедренный, то $AK = CK = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot 9 = 4{,}5$ см. (поскольку BK - высота и медиана)

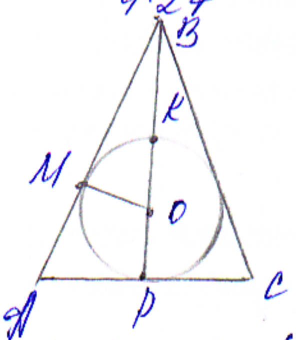
3) $\triangle ABK$ - прямоугольный: $AB^2 = AK^2 + BK^2$ (th. Пифагора)

$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{7{,}5^2 - 4{,}5^2} = \sqrt{56{,}25 - 20{,}25} = \sqrt{36} = 6$ см.

4) По формуле радиуса описанной окружности имеем: $OB = R = \frac{abc}{4S}$. Вычислим площадь: $S = \frac{1}{2} BK \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 = 27$ см^2

$OB = \frac{7{,}5 \cdot 7{,}5 \cdot 9}{4 \cdot 27} = \frac{7{,}5 \cdot 2{,}5}{4} = 4{,}6875$ см

г)



Дано: $\triangle ABC$ - равнобедренный, вписана окружность; $AC = 120$ см. $OB : OP = 17 : 15$

Найти: OP.

1) Пусть x - коэффициент пропорциональности. Тогда $OP = 15x$; $OB = 17x$; $BP = OP + OB = 17x + 15x = 32x$

2) $OP = OM = 15x$ (как радиусы); $AP = 60$ см (BP - высота и медиана)

$\triangle BOM \sim \triangle ABP$ (т.к. $\angle ABP$ - общий). Из подобия следует:

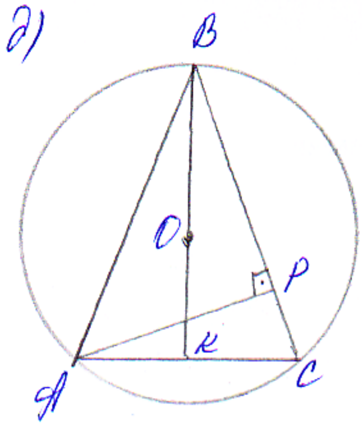
$\frac{AB}{OB} = \frac{AP}{OM} \Rightarrow AB = \frac{AP \cdot OB}{OM} = \frac{60 \cdot 17x}{15x} = 68$ см.

3) Найдем площадь $\triangle ABC$ по th. Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ - полупериметр. $p = \frac{1}{2}(120+68+68) = 128$ см.

$S = \sqrt{128(128-120)(128-68)^2} = 60 \cdot \sqrt{128 \cdot 8} = 60 \cdot 32 = 1920$ см^2

Найдем радиус вписанной окружности: $OP = r = \frac{S}{p} = \frac{1920}{128} = 15$ см.

д)



Дано: △ABC – равнобедренный, описана окружность; АС = 30 см, АР = 24 см.

Найти: ОВ.

1) △APC – прямоугольный: $AC^2 = AP^2 + PC^2$ (th. Пифагора)

$PC = \sqrt{AC^2 - AP^2} = \sqrt{900 - 576} = \sqrt{324} = 18$ см.

2) △APB – прямоугольный: AB = x; BP = x − 18.

По th. Пифагора получим: $AB^2 = AP^2 + BP^2$

$x^2 = \cancel{324}\, 576 + (x-18)^2$

$x^2 = 576 + x^2 - 36x + 324$

$36x = 576 + 324$

$x = 25$; AB = BC = 25 см.

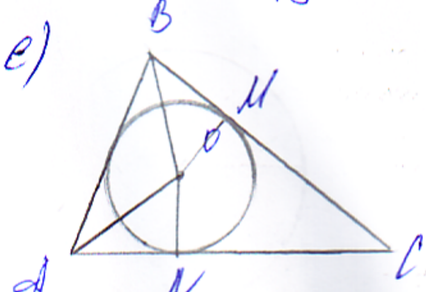
3) Найдем площадь △ABC: $S = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 24 = 300$ см².

(Периметр △ABC: $P = AC + 2BC = 30 + 2 \cdot 25 = 80$ см)

По формуле радиуса описанной окружности получим:

$R = OB = \frac{abc}{4S} = \frac{30 \cdot 25 \cdot 25}{4 \cdot 300} = \frac{625}{40} = 15{,}625$ см.

е)



Дано: △ABC, вписана окружность, ∠C = 60°, АО = 6 см; ВО = 10 см.

Найти: АВ.

1) △ABC: ∠A + ∠B + ∠C = 180° (сумма углов треугольника); ∠A + ∠B = 180 − ∠C = 180 − 60 = 120°.

2) АО и ВО – биссектрисы (т.к. О – центр вписанной окружности)

$\angle ABO = \frac{1}{2}\angle B$; $\angle BAO = \frac{1}{2}\angle A$; сложив данные равенства, получим:

$\angle ABO + \angle BAO = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B$

$\angle ABO + \angle BAO = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$

$\angle ABO + \angle BAO = \frac{1}{2} \cdot 120 = 60°$.

3) △ABO: ∠ABO + ∠BAO + ∠AOB = 180°; 60° + ∠AOB = 180° => ∠AOB = 180 − 60 = 120°

По th. косинусов получим:

$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cos\angle AOB$.

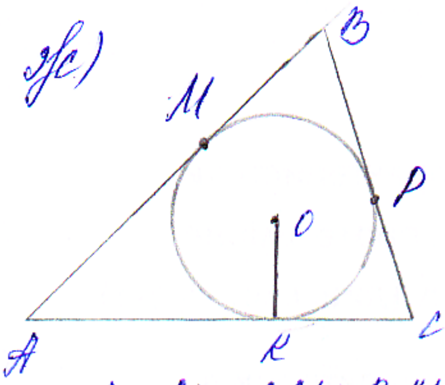
$AB^2 = 36 + 100 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cos 120°$

$AB^2 = 136 + 120 \cdot \frac{1}{2}$

$AB^2 = 196$

AB = 14 см.

ж) с)



Дано: $\triangle ABC$, вписана окружность, $AB = 30$ см, $PC = 12$ см, $BP = 14$ см.

Найти: OK.

1) $BC = PC + BP = 12 + 14 = 26$ см.
$CK = PC = 12$ см; $BP = BM = 14$ см (как касательные, проведенные из точек B и C)

2) $AB = AM + BM \Rightarrow AM = AB - BM = 30 - 14 = 16$ см.
$AK = MA = 16$ см (как касательные, проведенные из точки A)

3) $AC = CK + AK = 16$ см $+ 12$ см $= 28$ см.

4) Найдем площадь $\triangle ABC$ по th. Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ – полупериметр; $p = \frac{1}{2}(28+26+30) = 42$ см.
$S = \sqrt{42(42-30)(42-26)(42-28)} = \sqrt{42 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 14} = 4\sqrt{14 \cdot 3 \cdot 12 \cdot 14} = 4 \cdot 14 \cdot \sqrt{36} = 336$ см^2
По формуле радиуса вписанной окружности получим:
$OK = r = \frac{S}{p} = \frac{336}{42} = 8$ см.

③ Вписанные и описанные четырехугольники.

а) Проекция меньшей стороны прямоугольника на диагональ равна 9см. Найти площадь прямоугольника, если радиус описанной окружности равен 12,5см.

б) Точка касания вписанной окружности стороны ромба делит ее на отрезки длиной 18см и 32см. Найти диагонали ромба.

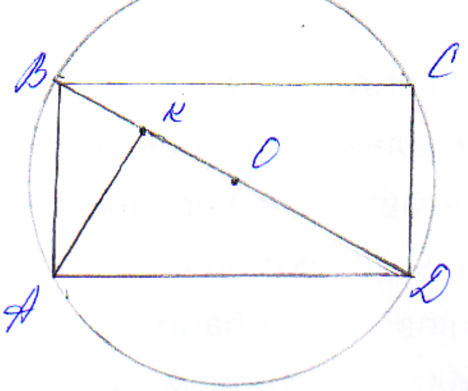
в) Трапеция с основаниями равными 6см и 8см вписана в окружность радиусом 5см так, что оба основания находятся по одну сторону от центра окружности. Найти площадь трапеции.

г) В прямоугольную трапецию вписана окружность. Точка касания делит большую боковую сторону на отрезки 16см и 36см. Найти периметр трапеции.

д) В равнобедренную трапецию вписана окружность радиуса 12см. Найти площадь трапеции, если боковая сторона равна 25см.

е) Боковые стороны трапеции равны 20см и 13см, а разность оснований – 21см. Найти площадь трапеции, если известно, что в нее можно вписать окружность.

а)



Дано: ABCD-прямоугольник, описана окружность, OB=12,5см. BK=9см.

Найти: S.

1) O-точка пересечения диагоналей и центр ~~вписан~~ описанной окружности

BD-диаметр, BD=2OB=25см.

2) Δ ABD-прямоугольный, AK-высота.

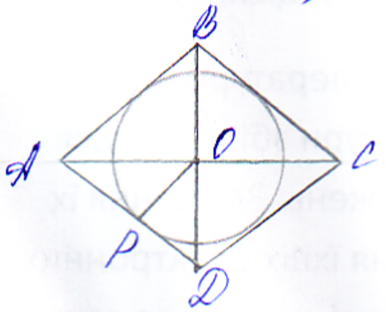
По свойству катетов прямоугольного треугольника:

$\frac{BD}{AB}=\frac{AB}{BK} \Rightarrow AB^2=BD\cdot BK$, $AB=\sqrt{BD\cdot BK}=\sqrt{9\cdot 25}=3\cdot 5=15$ см.

По th. Пифагора: $BD^2=AD^2+AB^2$; $AD=\sqrt{BD^2-AB^2}=\sqrt{625-225}=\sqrt{400}=20$ см.

3) Найдем площадь: $S=AB\cdot AD=15\cdot 20=300$ см^2.

б)



Дано: ABCD-ромб, вписана окружность, AP=32см, PD=18см.

Найти: AC, BD.

1) Δ AOD-прямоугольный, OP-высота (т.к. AD-касательная, а OP-радиус окружности)

AD=AP+PD=32+18=50см.

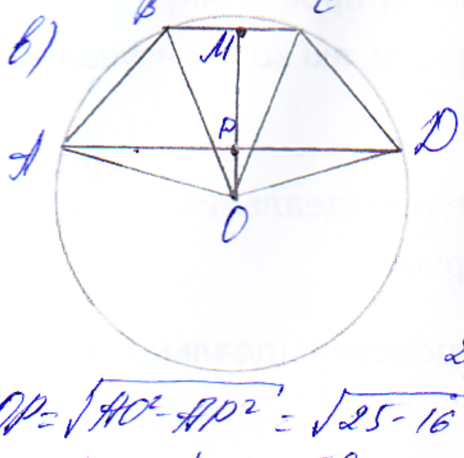
По свойству ~~высоты~~ катета прямоугольного треугольника:

$\frac{AO}{AD}=\frac{AD}{AO} \Rightarrow AO^2=AD\cdot AP \Rightarrow$ $AO=\sqrt{AD\cdot AP}=\sqrt{32\cdot 50}=40$ см.

$\frac{AD}{OD}=\frac{OD}{PD} \Rightarrow OD^2=AD\cdot PD \Rightarrow$ $OD=\sqrt{AD\cdot PD}=\sqrt{18\cdot 50}=30$ см.

2) Т.к. диагонали ромба делятся точкой пересечения пополам, то: AC=2AO=80см. BD=2BO=60см.

в)



Дано: ABCD-трапеция, AD=8см, BC=6см, описана окружность; OA=R=5см.

Найти: S.

1) Δ AOD-равнобедренный (т.к. AO=OD), OP-высота и медиана, $AP=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}\cdot 8=4$ см.

2) Δ AOP-прямоугольный $AO^2=OP^2+AP^2$

$OP=\sqrt{AO^2-AP^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$ см.

3) Δ BOC-равнобедренный (т.к. BO=CO); OM-высота и медиана;

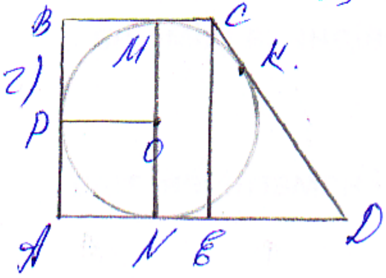
$BM=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\cdot 6=3$ см

4) ΔBOM - прямоугольный: $OB^2 = BM^2 + OM^2 \Rightarrow OM = \sqrt{OB^2 - BM^2} =$
$= \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$ см.

5) $OM = OP + PM \Rightarrow PM = OM - OP = 4 - 3 = 1$ см.

Найдем площадь: $S = \frac{BC+AD}{2} \cdot PM = \frac{6+8}{2} \cdot 1 = 7$ см^2.

г)



Дано: $ABCD$ - прямоугольная трапеция, вписана окружность, $CK = 16$ см, $DK = 36$ см.
Найти: P

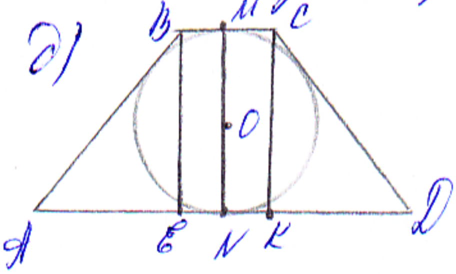
1) $CD = CK + DK = 16 + 36 = 52$ см.
$CK = CM = 16$ см; $DK = DN = 36$ см (как касательные, проведенные из точек C и D)
Пусть $OM = ON = OP = x$ (как радиусы). Т.к. $BMNA$ - прямоугольник, то $BM = AN = OP = x$; $AP = ON = x$; $BP = OM = x$.
Получим: $BC = BM + CM = x + 16$; $AD = AN + DN = x + 36$. $AB = AP + BP = 2x$

2) $BC = AE$ (т.к. $ABCE$ - прямоугольник): $AE = x + 16$
$AD = AE + ED \Rightarrow ED = AD - AE = x + 36 - (x + 16) = x + 36 - x - 16 = 20$ см.

3) ΔCED - прямоугольный: $CD^2 = CE^2 + ED^2 \Rightarrow CE = \sqrt{CD^2 - ED^2} =$
$= \sqrt{52^2 - 20^2} = \sqrt{2704 - 400} = \sqrt{2304} = 48$ см.
Т.к. $EC = AB$, то $2x = 48 \Rightarrow x = 24$ см.

4) $BC = 24 + 16 = 40$ см; $AD = 24 + 36 = 60$ см.
Найдем периметр: $P = BC + AD + CD + AB = 40 + 60 + 52 + 48 = 200$ см.

д)



Дано: $ABCD$ - равнобедренная трапеция; $OM = ON = 12$ см; $CD = 25$ см.
Найти: S.

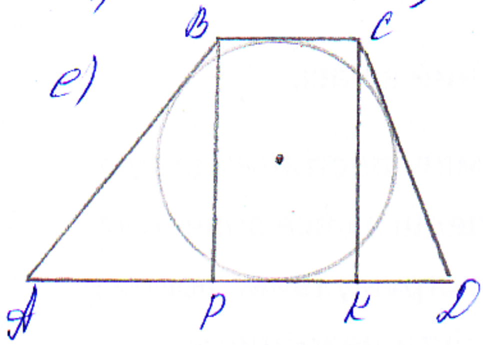
1) ΔCKD - прямоугольный: $CD^2 = CK^2 + KD^2$;
$CK = MN = 2OM = 24$ см; $KD = \sqrt{CD^2 - CK^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = \sqrt{625 - 576} = \sqrt{49} = 7$ см.

2) $\Delta CDK = \Delta ABE$ (т.к. $AB = CD$; $\angle A = \angle D$) $\Rightarrow KD = AE = 7$ см.
$AD = AE + EK + KD = EK + 2KD = EK + 14$.
$EK = BC$ (т.к. $BCKE$ - прямоугольник) $\Rightarrow AD = BC + 14$.

3) Т.к. в трапецию можно вписать окружность, то:
$BC + AD = AB + CD$.
$BC + BC + 14 = 25 + 25$
$2BC + 14 = 50$
$2BC = 36$
$BC = 18$ см.
$AD = 32$ см

4) Найдем площадь: $S = \frac{BC+AD}{2} \cdot CK = \frac{18+32}{2} \cdot 24 = 600 см^2$.

е)



Дано: ABCD – трапеция, AB = 20 см, CD = 13 см, AD – BC = 21 см; в трапецию вписана окружность.

Найти: S.

1) Т.к. в трапецию можно вписать окружность, то: $AD + BC = AB + CD$; $AD + BC = 20 + 13 = 33$ см.

Получим систему:

$$\begin{cases} AD + BC = 33 \\ AD - BC = 21 \end{cases}$$

Сложив уравнения системы, получим:

$2AD = 54$; $AD = 27$ см; $BC = AD - 21 = 27 - 21 = 6$ см.

2) Т.к. BCKP – прямоугольник, то $BC = KP$; $CK = BP$.

$AD = AP + KP + KD = AP + BC + KD \Rightarrow AD - BC = AP + KD$; $AP + KD = 21$ см.

Пусть $AP = x$; $KD = 21 - x$.

3) ΔABP – прямоугольный: $AB^2 = BP^2 + AP^2 \Rightarrow BP^2 = AB^2 - AP^2 = 400 - x^2$

4) ΔCKD – прямоугольный: $CD^2 = KD^2 + CK^2 \Rightarrow CK^2 = CD^2 - KD^2 = 169 - (21-x)^2$

Т.к. $BP = CK$, то:

$400 - x^2 = 169 - (21 - x)^2$

$400 - x^2 = 169 - 441 + 42x - x^2$

$42x = 400 + 441 - 169$

$42x = 672$

$x = 16 \Rightarrow AP = 16$ см.

~~$CK = \sqrt{}$~~ $BP = \sqrt{AB^2 - AP^2} = \sqrt{400 - 256} = \sqrt{144} = 12$ см.

5) Найдем площадь: $S = \frac{BC+AD}{2} \cdot BP = \frac{27+6}{2} \cdot 12 = 198 см^2$.

Задачи для самостоятельного решения

1) Из точки вне окружности проведены секущая и касательная. Секущая в точке пересечения с окружностью делится на два отрезка: внешний, равный 2см, и внутренний, равный 6см. Найти длину касательной.

2) Радиус окружности 7см. Из точки, удаленной от центра на 9см, проведена секущая так, что она делится окружностью пополам. Найти длину этой секущей.

3) Из одной точки к окружности проведены касательная и секущая. Определить их длину, если касательная на 20см меньше внутреннего отрезка секущей и на 8см больше внешнего отрезка.

4) Определить расстояние от центра окружности до той точки, из которой выходят касательная и секущая, если они соответственно равны 4см и 8см, а секущая удалена от центра на 12см.

5) Через концы хорды длина которой 30см проведены к окружности две касательных до пересечения их в точке. Найти расстояние от точки A до хорды, если радиус окружности равен 17см.

6) В окружности проведены диаметр и хорда, равная 24см, которые пересекаются. Точка пересечения делит диаметр на отрезки, разность которых равна 12. Найти диаметр.

7) В окружности перпендикулярно диаметру AB проведена хорда CD. Точка их пересечения делит диаметр на отрезки 18см и 32см. Найти расстояние от конца хорды до дальнего конца диаметра.

8) Из точки A, взятой на окружности, проведены диаметр AB, равный 10см, и хорда AC. Из точки B на хорду опущен перпендикуляр BC длиной 6см, а также через нее проведена касательная, пересекающая продолжение хорды в точке D. Найти длину касательной.

9) Радиусы двух пересекающихся окружностей равны 30см и 40см. Определить расстояние между центрами этих окружностей, если их общая хорда равна 48см, а центры лежат по разные стороны от нее.

10) Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами 120° и 90°. Найти расстояние между центрами

окружностей, лежащими по одну сторону от хорды, если ее длина равна $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$ см.

11) Равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна 37см, а основание 24см, вписан в окружность. Найти ее радиус.

12) Расстояние от боковой стороны равнобедренного треугольника, равной 16см, до центра описанной окружности равно 6см. Найти основание треугольника.

13) Окружность радиуса 10см описана около равнобедренного треугольника. Расстояние от центра этой окружности до основания равно 6 см. Найти боковую сторону.

14) Вписанная в прямоугольный треугольник окружность касается гипотенузы AB в точке K. Найти радиус этой окружности, если AK=4см, BK=6см.

15) В прямоугольный треугольник ABC ($\angle C=90°$) вписана окружность с центром O. Найти площадь треугольника, если отрезок OA равен 8см и составляет с гипотенузой угол 30°.

16) Окружность радиуса $4\sqrt{3}$ см вписана в прямоугольный треугольник, один из острых углов которого равен 30°. Найти гипотенузу треугольника.

17) В равнобедренный треугольник с основанием 6 см вписана окружность радиуса 2 см. Найти боковую сторону треугольника.

18) Радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник ABC (AB=BC) равен 12см, а расстояние от центра окружности до (~~боковой сторон~~) вершины B - 20см. Найти периметр.

19) Боковая сторона равнобедренного треугольника делится точкой касания вписанной в его окружности в отношении 8:9, считая от угла при основании треугольника. Найти площадь треугольника, если радиус вписанной окружности равен 16 см.

20) Центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, делит высоту, проведенную к основанию на отрезки 34см и 16. Найти площадь треугольника.

21) Одна из сторон треугольника равна 25см, а другая делится точкой касания вписанной окружности на отрезки 22см и 8см, считая от конца известной стороны. Найти радиус вписанной окружности.

22) Периметр прямоугольника равен 68см. Найти площадь прямоугольника, если радиус описанной окружности равен 13см.

23) Одна из сторон прямоугольника равна 6см, а проекция второй стороны на диагональ - 5см. Найти радиус описанной окружности

24) Найти площадь прямоугольника, вписанного в окружность радиусом 15см, если проекция его большей стороны на диагональ равна 24см.

25) В ромб, который меньшей диагональю делится на два равносторонних треугольника, вписана окружность радиуса 4см. Найти площадь ромба

26) Большая диагональ ромба равна 28см, а боковая сторона ромба относится к меньшей диагонали, как 25:24. Найти радиус вписанной окружности.

27) Основания трапеции равны 32см и 24см, а высота ее 28см. Трапеция вписана в окружность. Найти радиус этой окружности.

28) Найти диагональ и боковую сторону равнобедренной трапеции с основаниями 12см и 20см, если центр описанной окружности лежит на большем основании.

29) Большая боковая сторона прямоугольной трапеции равна $12\sqrt{2}$ а острый угол - 45°. В трапецию можно вписать окружность. Найти площадь трапеции.

30) Основания равнобедренной трапеции равны 9см и 21см, а диагональ - 17см. Найти радиус описанной окружности.

31) Точка касания окружности, вписанной в прямоугольную трапецию делит большее основание на отрезки длиной 20см и 25см. Найти периметр трапеции.

32) Радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, равен 4см, а разность оснований - ~~4~~ 6см. Найти площадь трапеции.

33) Найти периметр прямоугольной трапеции, если точка касания вписанной окружности делит большую боковую сторону на отрезки длинами 8 см и 50см.

34) Радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, равен 8см, а один из отрезков, на которые точка касания делит боковую сторону, - 4см. Найти площадь трапеции.

35) Радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, равен 6 см. Разность оснований составляет 10см. Найти площадь трапеции.

36) Окружность, вписанная в равнобедренную трапецию, точкой касания делит боковую сторону на отрезки 8см и 18см. Найти площадь трапеции.

37) Боковые стороны трапеции равны 13см и 15см, а основания относятся как 1:3. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Найти площадь трапеции.

38) Боковые стороны трапеции равны 26см и 30см, а разность оснований - 28см. Зная, что в трапецию можно вписать окружность, найти площадь трапеции.