

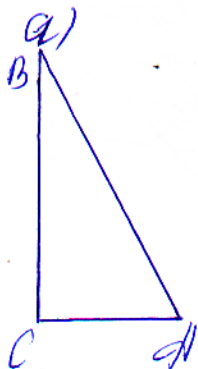
Треугольники

Примеры решения задач

① Прямоугольный и равнобедренный треугольники:

- Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 34 см, а отношение катетов составляет 45:8. Найти площадь треугольника
- Высота прямоугольного треугольника делит гипотенузу на отрезки длиной 5 и 7,2 см. Найти периметр треугольника.
- Медиана, проведенная к одному из катетов прямоугольного треугольника равна 15 см, а гипотенуза - 17 см. Найти площадь треугольника
- Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15 см, а проекция второго катета на гипотенузу равна 16 см. Найти второй катет и треугольника.
- Высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, равна 14 см; основание относится к боковой стороне как 48:25. Найти площадь треугольника.
- Высота равнобедренного треугольника, проведенная к боковой стороне, делит ее на отрезки 4 и 16 см, считая от вершины угла при основании. Вычислить высоту треугольника, проведенную к основанию
- В равнобедренном треугольнике, высота, проведенная к основанию равна 5, а, высота проведенная к боковой стороне равна 6. Найти косинус угла при вершине треугольника.

Решение.



Дано: $\triangle ABC$ - прямоугольный; $AB = 34$;

$$\frac{BC}{AC} = \frac{15}{8}$$

Найти: S_{\triangle} - ?

1) Площадь прямоугольного треугольника $S = \frac{1}{2} AC \cdot BC$

2) Пусть x - коэффициент пропорциональности, тогда

$$BC = 15x, AC = 8x. \text{ По th. Пифагора: } AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$(15x)^2 + (8x)^2 = 34^2; \quad 225x^2 + 64x^2 = 1156; \quad 289x^2 = 1156;$$

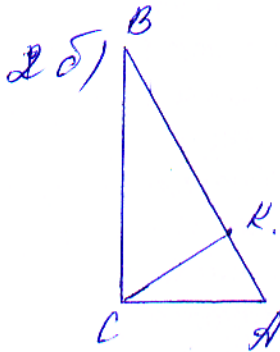
$$x^2 = 4, \text{ тогда } x = 2$$

— r —

Получим: $BC = 15x = 30$ см; $AC = 8x = 16$ см.

Найдем площадь: $S = \frac{1}{2} BC \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 16 = 240$ см².

Ответ: $S = 240$ см²



Дано: $\triangle ABC$ - прямоугольный, $CK \perp AB$;

$AK = 5$ см; $BK = 7,2$ см.

Найти: P .

1) $\triangle ABC$ - прямоугольный. По свойству высоты прямоугольного треугольника имеем:

$$\frac{AK}{CK} = \frac{CK}{BK}; \quad CK^2 = AK \cdot BK; \quad CK = \sqrt{AK \cdot BK} = \sqrt{5 \cdot 7,2} = \sqrt{36} = 6 \text{ см.}$$

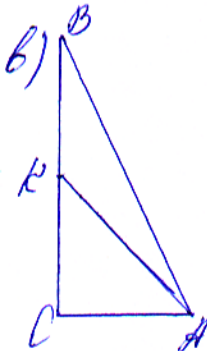
2) $\triangle ACK$ - прямоугольный: $AC^2 = CK^2 + AK^2$ (т. Пифагора)

$$AC = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{36 + 25} = \sqrt{61} \text{ см}$$

3) $\triangle BCK$ - прямоугольный: $BC^2 = BK^2 + CK^2$ (т. Пифагора)

$$BC = \sqrt{7,2^2 + 6^2} = \sqrt{51,84 + 36} = \sqrt{87,84} \text{ см.}$$

4) Найдем периметр: $P = AB + AC + BC = 12,2 + \sqrt{61} + \sqrt{87,84}$ (см).



Дано: $\triangle ABC$ - прямоугольный, AK - медиана;

$AK = 15$ см, $AB = 17$ см.

Найти: S_{\triangle}

Площадь прямоугольного треугольника $S = \frac{1}{2} BC \cdot AC$

1) Пусть $AC = x$, $BC = y$, тогда $CK = \frac{1}{2} y$

$\triangle ABC$: $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (т. Пифагора)

$$289 = x^2 + y^2$$

2) $\triangle ACK$ - прямоугольный: $AK^2 = AC^2 + CK^2$ (т. Пифагора)

$$225 = x^2 + \frac{1}{4} y^2. \text{ Получим систему:}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 289 \\ x^2 + \frac{1}{4} y^2 = 225 \end{cases}; \text{ Выявим уравнения системы:}$$

$$\frac{3}{4} y^2 = 64$$

$$y^2 = \frac{256}{3}$$

$$y = \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{3} \text{ Подставим в первое уравнение:}$$

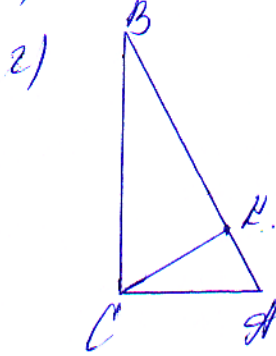
$$x^2 + \frac{256}{3} = 289 \quad | \cdot 3$$

$$3x^2 + 256 = 867$$

$$3x^2 = 611$$

$$x^2 = \frac{611}{3}; \quad x = \sqrt{\frac{611}{3}}$$

3) Высшими площадь: $S = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} xy = \frac{1}{2} \cdot \frac{16\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{\frac{611}{3}} = \frac{8}{3} \sqrt{611} \text{ см}^2$.



Дано: $\triangle ABC$ - прямоугольный; $CK \perp AB$;
 $BC = 15 \text{ см}$; $AK = 16$.

Найти: AC .

1) Пусть $AB = x$, тогда $BK = x - 16$. По свойству катета получим:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BK}; \quad BC^2 = AB \cdot BK$$

$$x(x-16) = 15^2$$

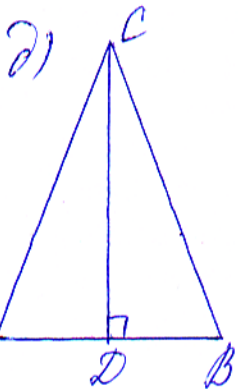
$$x^2 - 16x - 225 = 0$$

$$x_1 = 25 \quad x_2 = -9 \text{ (не имеет смысла)}$$

$$AB = 25 \text{ см}, \quad BK = 9 \text{ см}$$

2) $\triangle ABC$: по т. Пифагора получим:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2; \quad AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{625 - 225} = \sqrt{400} = 20$$



Дано: $\triangle ABC$ - равнобедренный; $CD \perp AB$; $CD = 14 \text{ см}$.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{48}{25}$$

Найти: S_{\triangle} - ?

Площадь треугольника: $S = \frac{1}{2} AB \cdot CD$.

1) Пусть x - коэффициент пропорциональности, тогда $AB = 24x$, $AC = 25x$. Т.к. CD - высота и медиана, то $AD = \frac{1}{2} CD = 24x$.

2) $\triangle ACD$ - прямоугольный; $AC^2 = AD^2 + CD^2$ (т. Пифагора)

$$(25x)^2 = (24x)^2 + 14^2$$

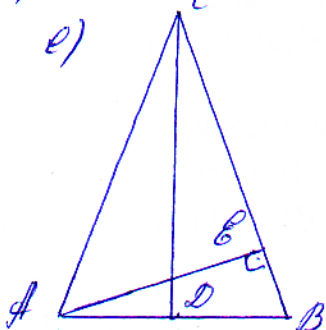
$$576x^2 + 196 = 625x^2$$

$$49x^2 = 196$$

$$x^2 = 4; \quad x = 2$$

Тогда: $AB = 48 \cdot 2 = 96 \text{ см}$.

3) Найдем площадь: $S = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 96 = 672 \text{ см}^2$.



Дано: $\triangle ABC$ - равнобедренный; $AE \perp BC$, $CD \perp AB$.

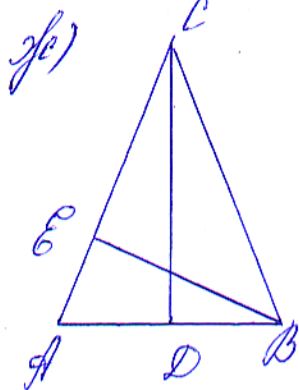
$$BE = 4 \text{ см}, \quad CE = 16 \text{ см}$$

Найти: CD .

- 1) ΔABC сторона $BC = BE + CE = 4 + 16 = 20$ см.; $AC = BC = 20$ см.
 2) ΔACE - прямоугольный: $AC^2 = CE^2 + AE^2$ (th. Пифагора)
 $AE = \sqrt{AC^2 - CE^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = \sqrt{400 - 256} = \sqrt{144} = 12$ см.
 3) ΔABE - прямоугольный: $AB^2 = BE^2 + AE^2$ (th. Пифагора)
 $AB = \sqrt{BE^2 + AE^2} = \sqrt{4^2 + 12^2} = \sqrt{16 + 144} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$ см.
 4) Площадь треугольника: $S = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} CD \cdot AB$.

$$\frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} CD \cdot AB$$

$$CD = \frac{AB \cdot BC}{AB} = \frac{12 \cdot 20}{4\sqrt{10}} = \frac{60}{\sqrt{10}} = \frac{60\sqrt{10}}{10} = 6\sqrt{10} \text{ (см)}$$



Дано: ΔABC - равнобедренный, $CD \perp AB$, $BE \perp AC$
 $CD = 5$ см, $BE = 6$ см.

Найти: $\cos \angle ACB$.

1) Пусть $AB = x$; $AC = BC = y$. Т.к. CD - высота и

медiana, то $AD = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} x$

2) ΔACD - прямоугольный; $AC^2 = AD^2 + CD^2 \Rightarrow$

$$y^2 = \frac{1}{4} x^2 + 25$$

3) Площадь треугольника: $S = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2} BE \cdot AC$;

$$\frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2} BE \cdot AC; \quad 5x = 6y \Rightarrow y = \frac{5}{6} x$$

$$\left(\frac{5}{6} x\right)^2 = \frac{1}{4} x^2 + 25$$

$$\frac{25}{36} x^2 - \frac{1}{4} x^2 = 25$$

$$\frac{16}{36} x^2 = 25$$

$$x^2 = \frac{25 \cdot 36}{16}; \quad x = \frac{30}{4} \Rightarrow AB = \frac{30}{4} \text{ см}; \quad y = \frac{5}{6} \cdot \frac{30}{4} = \frac{25}{4}; \quad AC = \frac{25}{4} \text{ см.}$$

4) ΔABC : th. косинусов:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \angle ACB$$

$$\left(\frac{30}{4}\right)^2 = \left(\frac{25}{4}\right)^2 + \left(\frac{25}{4}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{25}{4}\right)^2 \cos \angle ACB$$

$$\frac{900}{16} = \frac{625}{16} + \frac{625}{16} - 2 \cdot \frac{625}{16} \cos \angle ACB \quad | \cdot 16$$

$$900 = 1250 - 1250 \cos \angle ACB$$

$$1250 \cos \angle ACB = 350$$

$$\cos \angle ACB = \frac{350}{1250} = \frac{7}{25} = 0,28$$

② Произвольный треугольник:

а) Из вершины треугольника с основанием 60 см проведены к нему высота длиной 12 см и медиана 13 см. Найти боковую сторону.

б) Стороны треугольника 11 см, 15 см и 16 см. Найти проекцию наибольшей стороны на среднюю сторону.

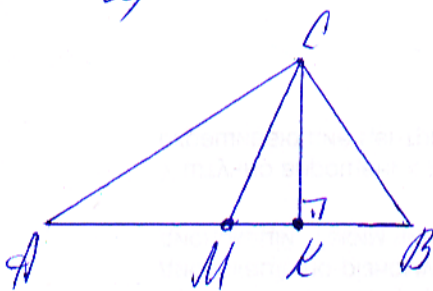
в) Высота треугольника равна 8 см, а углы при основании 30° и 45° . Найти площадь треугольника.

г) В треугольнике с основанием 30 см и высотой 11 см вписан прямоугольник с площадью 63 см^2 . Найти периметр этого прямоугольника.

д) Площадь треугольника ABC равна 16 см^2 . Найти длину стороны AB, если $AC=5 \text{ см}$, $BC=8 \text{ см}$ и известно, что угол C - тупой.

Решение.

а)



Дано: $\triangle ABC$, $AB=60 \text{ см}$. CM - медиана
 CK - высота, $CM=13 \text{ см}$, $CK=12 \text{ см}$.

Найти: AC

1) $\triangle MCK$ - прямоугольный.

$$CM^2 = MK^2 + CK^2 \text{ (т. Пифагора)}$$

$$MK^2 = CM^2 - CK^2; \quad MK = \sqrt{CM^2 - CK^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = 5 \text{ см}$$

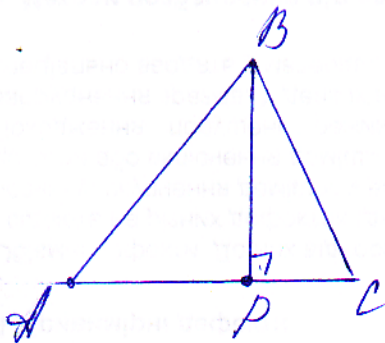
2) Т.к. CM - медиана, то $MB = AM = \frac{1}{2} AB = 30 \text{ см}$,

$$AK = AM + MK = 30 + 5 = 35 \text{ см}$$

3) $\triangle ACK$ - прямоугольный; $AC^2 = AK^2 + CK^2$ (т. Пифагора)

$$AC = \sqrt{AK^2 + CK^2} = \sqrt{35^2 + 12^2} = \sqrt{1225 + 144} = \sqrt{1369} = 37 \text{ см}$$

б)



Дано: $\triangle ABC$: $AB=16 \text{ см}$, $AC=15 \text{ см}$, $BC=11 \text{ см}$.

$BP \perp AC$

Найти: AP .

1) Пусть $AP=x$, $CP=15-x$.

2) $\triangle ABP$ - прямоугольный

$$AB^2 = AP^2 + BP^2 \text{ (т. Пифагора)}, \quad BP^2 = AB^2 - AP^2 = 256 - x^2$$

3) $\triangle BCP$ - прямоугольный. $BC^2 = CP^2 + BP^2$ (т. Пифагора)

$$BP^2 = BC^2 - CP^2 = 121 - (15-x)^2$$

Приравняв результаты 2-го и 3-го пунктов, получим:

$$256 - x^2 = 121 - (15 - x)^2$$

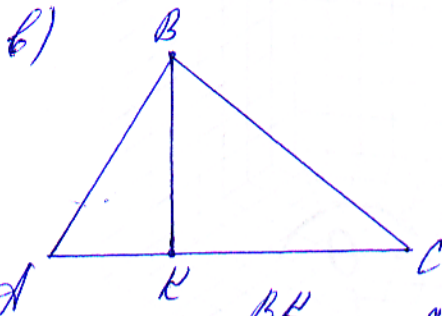
$$256 - x^2 = 121 - 225 + 30x - x^2$$

$$30x = 256 - 121 + 225$$

$$30x = 360$$

$$x = 12$$

$$AP = 12 \text{ см.}$$



Дано: $\triangle ABC$: BK - высота; $BK = 8 \text{ см.}$
 $\angle BAC = 45^\circ$, $\angle BCA = 30^\circ$

Найти: S

1) $\triangle ABK$ - прямоугольный

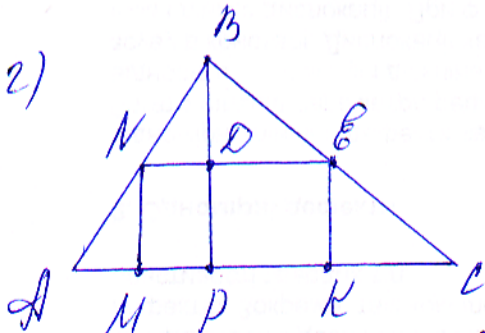
$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{BK}{AK} \Rightarrow AK = \frac{BK}{\operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{8}{1} = 8 \text{ см.}$$

2) $\triangle BCK$ - прямоугольный

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{BK}{CK} \Rightarrow CK = \frac{BK}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{8}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3} \text{ см.}$$

$$3) AC = AK + CK = 8 + 8\sqrt{3} = 8(1 + \sqrt{3}) \text{ см.}$$

$$\text{Найдем площадь: } S = \frac{1}{2} BK \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8(1 + \sqrt{3}) = 32(1 + \sqrt{3}) \text{ см}^2$$



Дано: $\triangle ABC$: $AC = 30 \text{ см}$, BP - высота
 $BP = 10 \text{ см}$; $MNPK$ - вписанный прямоугольник;
 $S_{\text{пря}} = 63 \text{ см}^2$.

Найти: $P_{\text{пря}}$.

1) Пусть $MK = x$, $MN = y$. Тогда: $BD = BP - DP = 10 - y$

2) $\triangle ABC \sim \triangle NBE$ (т.к. $\angle BAC = \angle BNE$ (как односторонние);
 $\angle BCA = \angle BEN$). Откуда следует:

$$\frac{EN}{AC} = \frac{BD}{BP} \quad (\text{у подобных треугольников высоты также подобны})$$

$$\frac{x}{30} = \frac{10 - y}{10}; \quad 10x = 30(10 - y); \quad x = 3(10 - y); \quad x = 30 - 3y; \quad x +$$

3) Площадь прямоугольника $S_{\text{пря}} = MN \cdot MK = xy$;

$$xy = 63$$

Получим систему:

$$\begin{cases} xy = 63 \\ x = 30 - 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} y(30 - 3y) &= 63 \\ -3y^2 + 30y - 63 &= 0 \\ y^2 - 10y + 21 &= 0 \\ y_1 &= 7 \text{ см } y_2 = 3 \text{ см.} \end{aligned}$$

Найдем значение x :

$$x_1 = 30 - 3 \cdot 7 = 9 \text{ см } x_2 = 30 - 3 \cdot 3 = 21 \text{ см.}$$

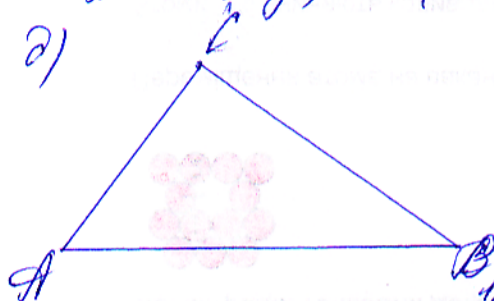
В первом случае периметр равен:

$$P_1 = 2(x_1 + y_1) = 2(7 + 9) = 32 \text{ см}$$

Во втором случае периметр равен:

$$P_2 = 2(x_2 + y_2) = 2(21 + 3) = 48 \text{ см.}$$

2)



Дано: $\triangle ABC$: $AC = 5 \text{ см}$; $BC = 8 \text{ см}$

$$S_D = 16 \text{ см}^2, \angle C > 90^\circ$$

Найти: AB .

1) Площадь треугольника находится по формуле: $S = \frac{1}{2} AC \cdot BC \sin \angle ACB$. Получим:

$$16 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \sin \angle ACB; \quad 16 = 20 \sin \angle ACB;$$

$$\sin \angle ACB = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

2) Вычислим $\cos \angle ACB$: $\cos^2 \angle ACB + \sin^2 \angle ACB = 1$.

$$\cos \angle ACB = -\sqrt{1 - \sin^2 \angle ACB} \quad (\text{т.к. } \angle C - \text{тупой})$$

$$\cos \angle ACB = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

3) По теореме косинусов получим:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 AC \cdot BC \cos \angle ACB$$

$$AB^2 = 25 + 64 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = 89 + 48 = 137$$

$$AB = \sqrt{137} \text{ см.}$$

Задачи для самостоятельного решения:

- 1) Отношение катетов прямоугольного треугольника равно $3:4$, а гипотенуза равна 35 см. Найти площадь треугольника.
- 2) Периметр прямоугольного треугольника равен 80 см, а отношение катетов $8:15$. Найти гипотенузу.
- 3) Высота прямоугольного треугольника равна 2 см. Она разбивает гипотенузу на отрезки, разность которых равна 3 см. Найти периметр треугольника.
- 4) Катет прямоугольного треугольника равен 18 см, а проекция второго катета на гипотенузу равна 9 см. Найти гипотенузу треугольника.
- 5) В прямоугольном треугольнике катет равен 5 см, а медиана, проведенная к другому катету, равна 13 см. Найти высоту треугольника, проведенную к гипотенузе.
- 6) Медианы, проведенные к катетам прямоугольного треугольника, равны $\sqrt{89}$ и $\sqrt{156}$. Найти гипотенузу.
- 7) Периметр равнобедренного треугольника равен 36 см, а отношение боковой стороны к основанию составляет $5:2$. Найти площадь треугольника.
- 8) Основание равнобедренного треугольника на 2 см больше боковой стороны. Найти периметр треугольника, если высота, проведенная к основанию, равна 8 см.
- 9) Высота, равнобедренного треугольника, проведенная к боковой стороне равна 8 см. Она разбивает боковую сторону на отрезки, разность длин которых равна 2 см. Найти высоту треугольника, проведенную к основанию.
- 10) Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 13 см, а высота, проведенная к ней - 5 см. Найти косинус угла при основании треугольника.
- 11) Боковая сторона равнобедренного треугольника меньше основания на 9 см. Биссектриса угла при основании делит высоту, проведенную к основанию на отрезки, относящиеся как $5:4$ (считая от вершины). Найти площадь треугольника.

- 12) Найти высоту, проведенную к боковой стороне равнобедренного треугольника, если высота, опущенная на основание равна $4\sqrt{3}$, а угол при вершине 120° .
- 13) В прямоугольный равнобедренный треугольник вписан прямоугольник так, что он имеет общий прямой угол с треугольником. Периметр этого прямоугольника равен 25 см. Найти площадь треугольника.
- 14) Найти площадь треугольника, если его две стороны равны 6 см и 4 см, а высота, проведенная к 3-й стороне, равна 2 см.
- 15) Две стороны треугольника равны 10 см и 12 см, а высота, проведенная к большей из них, равна 8 см. Найти периметр.
- 16) В треугольнике ABC сторона AB равна 20 см. Высота CD, делит основание AC на отрезки AD = 18 см и CD = 5 см. Найти косинус угла ABC.
- 17) Основание высоты, проведенной из вершины треугольника, делит основание треугольника на отрезки, относящиеся как 3:10. Боковые стороны треугольника равны 41 см и 50 см. Найти площадь треугольника.
- 18) Основание треугольника ABC AB = 3 см, а высота CD = $\sqrt{3}$ см. Основание высоты D делит AB, причем AD = BC. Найти периметр треугольника.
- 19) Основание треугольника равно 6 см, а высоты, проведенные к боковым сторонам, равны 2 см и $2\sqrt{3}$ см. Найти меньшую из боковых сторон.
- 20) Высота треугольника, проведенная из его вершины, делит основание на отрезки длиной 9 см и 16 см. Найти площадь треугольника, если одна из боковых сторон больше другой на 5 см.