Алгебраические неравенства

Примеры решения задач.

① Линейные неравенства. Квадратные неравенства

Решить неравенства. Указать в ответе наименьшее целое число, являющееся решением неравенства.

а) $x+x^2<x(x+5)+5$. б) $\frac{2x+2}{5}-\frac{x-1}{2}\le 2$

в) $3x^2-7x+2<0$

Решение.

а) Раскроем скобки.

$x^2+x<x(x+5)+5$

$x^2+x<x^2+5x+5$

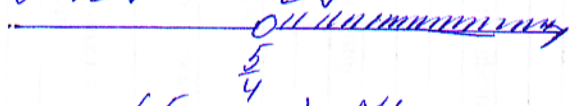
Перенесем члены, содержащие неизвестное, в левую часть, а свободные члены – в правую и решим получившееся неравенство

$x^2+x-x^2-5x<5$

$-4x<5$

$x>\frac{5}{4}$

Изобразим полученный промежуток на числовой оси:



$x\in\left(\frac{5}{4};+\infty\right)$ Наименьшим целым числом из этого промежутка является $x=2$

б) $\frac{2x+2}{5}-\frac{x-1}{2}\le 2$.

Умножим обе части неравенства на общий знаменатель (в данном случае – на 10)

$\frac{10(2x+2)}{5}-\frac{10(x-1)}{2}\le 2\cdot 10$

$2(2x+2)-5(x-1)\le 20$

Упростим получившееся неравенство и изобразим его решение на числовой оси.

$4x+4-5x+5\le 20$

$4x-5x\le 20-5-4$

$-x\le 11$

$x\ge -11$

$x \in [-11; +\infty)$. Наименьшим целым числом из этого промежутка является $x=-11$.

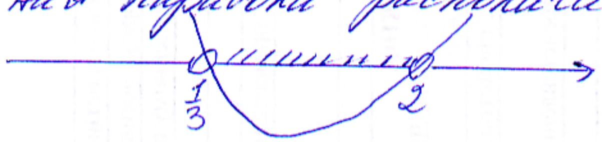
в) $3x^2-7x+2<0$.

Найдем корни этого неравенства.

$D=49-4\cdot2\cdot3=25 \quad \sqrt{D}=5$

$x_1=\frac{7+5}{6}=2 \quad x_2=\frac{7-5}{26}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

Отметим эти корни на числовой оси. Проведем через них параболу (в данном случае она будет проходить ветвями вверх, т.к. $a=3>0$). Поскольку от нас требуется найти промежутки, на которых трехчлен $3x^2-7x+2$ отрицателен, то решением неравенства будет промежуток, где построенная парабола располагается ниже оси.



$x \in \left(\frac{1}{3}; 2\right)$ Наименьшим целым числом из этого промежутка является $x=1$

② Решение неравенств методом интервалов.

Решить неравенство:

а) $(x-4)(x-1)(x+2)\geq0$. б) $(x+5)(x+1)^2(x-2)<0$.

в) $\frac{x-2}{x+4}>0$ г) $\frac{(x-3)(x+1)}{(x+3)}\geq0$. д) $x^5-16x\geq0$.

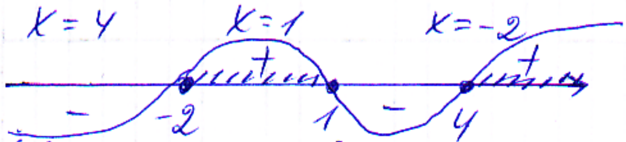
Решение.

а) $(x-4)(x-1)(x+2)\geq0$

Найдем корни неравенства и отметим их на числовой оси:

$x-4=0 \quad x-1=0 \quad x+2=0$

$x=4 \quad x=1 \quad x=-2$



Проверим знак неравенства в крайнем промежутке. Далее знаки будут чередоваться.

$x \in (-\infty; 2)$: $\begin{cases} x-4<0 \\ x-2<0 \\ x+2<0 \end{cases} \Rightarrow (x-4)(x-1)(x+2)<0$

Искомые промежутки $x \in [-2; 1] \cup [4; +\infty)$

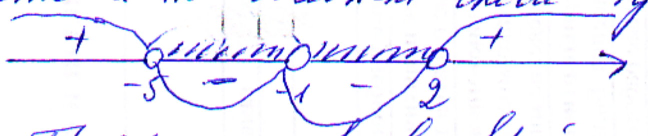
б) $(x+5)(x+1)^2(x-2)<0.$

Корни неравенства:

$x+5=0$ $x+1=0$ $x-2=0$

$x=-5$ $x=-1$ $x=2.$

Однако множитель $(x+1)^2$ всегда неотрицателен, поэтому не в состоянии изменить знака неравенства. Неравенство на этом промежутке сохраняет тот же знак, что и на соседнем слева промежутке.



Проверим знак в крайнем левом промежутке.

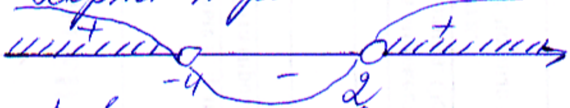
$x\in(-\infty;-5)$: $\left.\begin{matrix}x+5<0\\ x-2<0\end{matrix}\right\} \Rightarrow (x+5)(x+1)^2(x-2)>0.$

$x\in(-5;-1)\cup(-1;2)$

в) $\frac{x-2}{x+4}>0$ ОДЗ: $x\neq-4$)

По знаку данное неравенство равносильно неравенству: $(x-2)(x+4)>0$, поэтому применим метод интервалов

Корни неравенства: $x=2$; $x=-4$ (оно не включается в промежуток!)

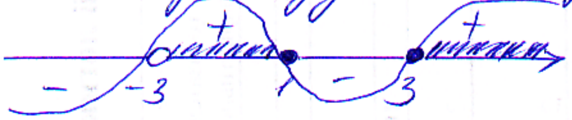


В крайнем левом промежутке неравенство будет иметь знак: $\left.\begin{matrix}x-2<0\\ x+4<0\end{matrix}\right\} \Rightarrow (x-2)(x+4)>0$

Искомый промежуток: $x\in(-\infty;-4)\cup(2;+\infty)$

г) $\frac{(x-3)(x+1)}{x+3}\geq0$ ОДЗ: $x\neq-3$.

Неравенство равносильно неравенству: $(x-3)(x+1)(x+3)\geq0$, но с учетом ОДЗ $x=-3$ не будет входить в рассматриваемый промежуток. Корни неравенства $x=3, x=-1, x=-3.$



В крайнем левом промежутке неравенство имеет знак:

$x\in(-\infty;-3)$: $\left.\begin{matrix}x-3<0\\ x+1<0\\ x+3<0\end{matrix}\right\} \Rightarrow (x-3)(x-1)(x+3) \cancel{\geq0} <0.$

Искомый промежуток: $x\in(-3;1]\cup[3;+\infty)$

д) $x^5-16x\geq 0$

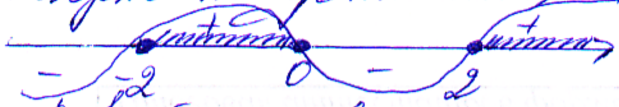
Разложим левую часть на множители:

$x(x^4-16)\geq 0$

$x(x^2-4)(x^2+4)\geq 0$

$x(x-2)(x+2)(x^2+4)\geq 0.$

Применим метод интервалов. Учтем, что множитель (x^2+4) всегда положителен и не имеет корней (его можно не учитывать). Корни неравенства: $x=0$; $x=-2$, $x=2$



В крайнем левом промежутке неравенство имеет знак:

$x\in(-\infty;-2]$: $\left.\begin{array}{l} x<0 \\ x-2<0 \\ x+2<0 \end{array}\right\} \Rightarrow x(x-2)(x+2)(x^2+4)<0.$

Искомый промежуток: $x\in[-2;0]\cup[2;+\infty)$

3 Решение рациональных неравенств.

Решить неравенства. В ответе указать наименьшее целое решение неравенства

а) $\dfrac{x+2}{3-x}>2$ б) $\dfrac{1}{x+2}<\dfrac{3}{x-3}$ в) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-1}\geq\dfrac{1}{x}$

Решение

а) $\dfrac{x+2}{3-x}>2$ Перенесем свободный член в левую часть и приведем к общему знаменателю.

$\dfrac{x+2}{3-x}-\dfrac{2}{1}>0$

$\dfrac{x+2-2(3-x)}{3-x}>0$

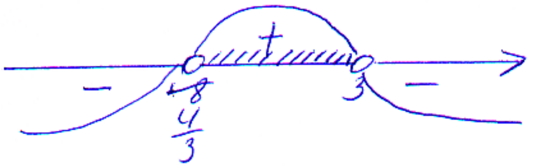
$\dfrac{x+2-6+2x}{3-x}>0$

$\dfrac{3x-8}{3-x}>0$

$\cancel{\dfrac{x+8}{3-x}<0}.$

Воспользуемся методом интервалов. Неравенство равносильно неравенству $(3x-8)(3-x)<0$. Его корни $x=+\frac{8}{3}$, $x=3$

С учетом ОДЗ: $x\neq 3$ получим:



$x \in (\frac{4}{3}; 3)$

Наименьшим целым числом из этого промежутка является: $x=2$.

б) $\frac{1}{x+2} < \frac{3}{x-3}$.

Перенесем вторую дробь в левую часть и приведем к общему знаменателю

$$\frac{1}{x+2} - \frac{3}{x-3} < 0$$

$$\frac{x-3-3(x+2)}{(x+2)(x-3)} < 0$$

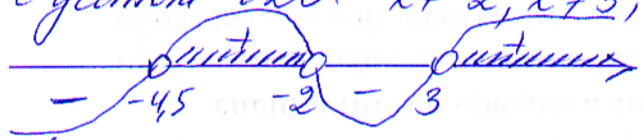
$$\frac{x-3-3x-6}{(x+2)(x-3)} < 0$$

$$\frac{-2x-9}{(x+2)(x-3)} < 0 \quad |:(-1)$$

$$\frac{2x+9}{(x+2)(x-3)} > 0$$

Применим метод интервалов; неравенство равносильно неравенству: $(2x+9)(x+2)(x-3)>0$, его корни: $x=3$, $x=-2$, $x=-4{,}5$

С учетом ОДЗ: $x \neq -2$, $x \neq 3$, получим:



$x \in (-4{,}5; -2) \cup (3; +\infty)$

Наименьшим целым числом из этого промежутка является $x=-4$.

в) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{x}$

Перенесем третью дробь в левую часть и приведем к общему знаменателю:

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \geq 0$$

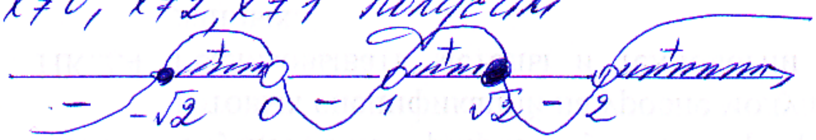
$$\frac{x(x-1)+x(x-2)-(x-1)(x-2)}{x(x-2)(x-1)} \geq 0$$

$$\frac{x^2-x+x^2-2x-x^2+2x+x-2}{x(x-2)(x-1)} \geq 0$$

$$\frac{+x^2-2}{x(x-2)(x-1)} \geq 0$$

$\cancel{x^2+2}$

Неравенство равносильно неравенству $(x^2-2)x(x-2)(x-1) \geq 0$. Его корни $x_1=\sqrt{2}$; $x_2=-\sqrt{2}$; $x_3=0$; $x_4=1$; $x_5=2$. С учетом ОДЗ: $x \neq 0$; $x \neq 2$, $x \neq 1$ получим



$x \in [-\sqrt{2}; 0) \cup (1; \sqrt{2}] \cup (2; +\infty)$

Наименьшим целым числом из этого промежутка является $x=-1$.

(4) Неравенства с модулем.

Решить неравенства

а) $|x-3|<1$ б) $|x^2+5x| \leq 6$ в) $|x|+|x+3| \leq 5$.

Указать наименьшее натуральное число, являющееся решением неравенства.

Решение

а) $|x-3|<1$

Найдем критическую точку неравенства:

$x-3=0$; $x=3$.

Рассмотрим 2 промежутка:

1) $x<3$: $x-3<0$. По определению модуля имеем:

$|x-3|=-(x-3)=3-x$. Получим:

$3-x<1$

$-x<-2$

$x>2$

Изобразим найденные промежутки на числовой оси:

$x \in (2; 3)$

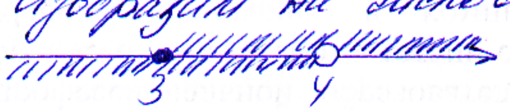
2) $x \geq 3$: $x-3>0$ По определению модуля имеем:

$|x-3|=x-3$. Получим

$x-3<1$

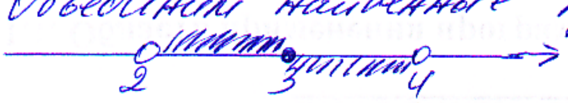
$x<4$.

Изобразим на числовой оси:



$x \in [3; 4)$

Объединим найденные промежутки



$x \in (2; 4)$

Наименьшее натуральное число из этого промежутка: $x=3$.

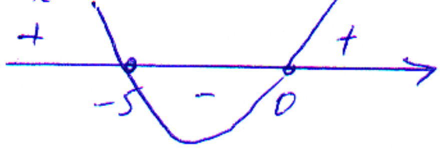
б) $|x^2+5x| \le 6$.

Найдем критические точки и исследуем знак подмодульного выражения

$x^2+5x=0$

$x(x+5)=0$

$x=0 \quad x=-5$



Рассмотрим промежутки одного знака:

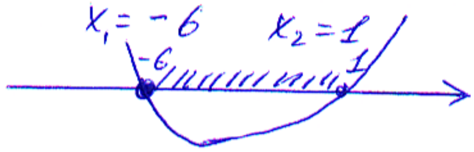
1) $x \in (-\infty;-5] \cup [0;+\infty)$: $x^2+5x \ge 0 \Rightarrow |x^2+5x| = x^2+5x$

При подстановке в неравенство получим

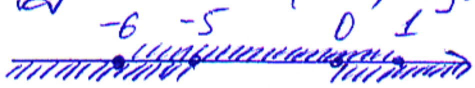
$x^2+5x \le 6$

$x^2+5x-6 \le 0$.

$x_1=-6 \quad x_2=1$



Учтем, что данное неравенство верно лишь на промежутке $x \in (-\infty;-5] \cup [0;+\infty)$



$x \in [-6;-5] \cup [0;1]$

2) $x \in (-5;0)$: $x^2+5x<0 \Rightarrow |x^2+5x| = -(x^2+5x) = -x^2-5x$

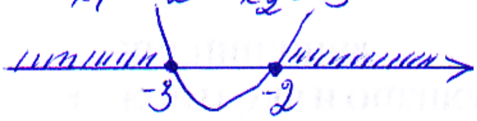
При подстановке в неравенство получим:

$-x^2-5x \le 6$

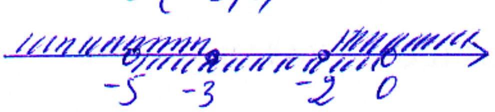
$-x^2-5x-6 \le 0$

$x^2+5x+6 \ge 0$.

$x_1=-2 \quad x_2=-3$

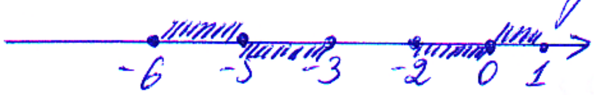


Учтем, что данное неравенство верно лишь на промежутке $x \in (-5;0)$



$x \in (-5;-3] \cup [-2;0)$

Объединим найденные промежутки



$x \in [-6;-3] \cup [-2;1]$

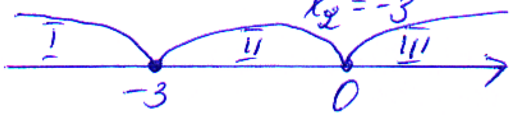
Наименьшим натуральным числом из данного промежутка является $x=1$.

в) $|x| + |x+3| \leq 5$.

Найдем нули подмодульных выражений и нанесем их на числовую ось. Исследуем знак подмодульных выражений на каждом из получившихся промежутков:

$x_1 = 0$ и; $x+3=0$

$x_2 = -3$



I: $x \in (-\infty; -3]$:

$x+3<0 \Rightarrow |x+3| = -(x+3) = -x-3$

$x<0 \Rightarrow |x| = -x$.

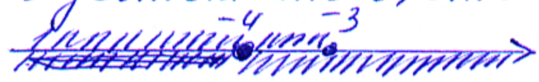
При подстановке в неравенство получим:

$-x - x - 3 \leq 5$

$-2x < 8$

$x \geq -4$

С учетом того, что $x \leq -3$, получим



~~$x \in (-\infty; -4)$~~ $x \in [-4; -3]$

II: $x \in [-3; 0]$:

$x+3>0 \Rightarrow |x+3| = x+3$

$x<0 \Rightarrow |x| = -x$

При подстановке в неравенство получим:

$-x + x + 3 \leq 5$

$3 \leq 5$ – заведомо верное неравенство

Решением будет весь рассматриваемый промежуток.

$x \in [-3; 0]$

III: $x \in (0; +\infty)$:

$x>0 \Rightarrow |x| = x$

$x+3>0 \Rightarrow |x+3| = x+3$

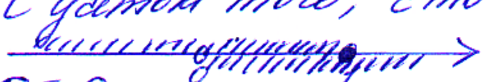
При подстановке в неравенство получим:

$x + x + 3 \leq 5$

$2x \leq 2$

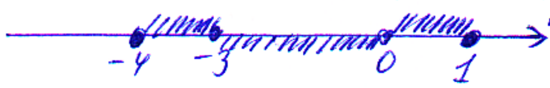
$x \leq 1$

С учетом того, что $x>0$, получим



$x \in (0; 1]$

Объединим найденные промежутки



$x \in [-4; 1]$

Наименьшим натуральным числом из данного промежутка является $x = 1$.

5) Системы неравенств. Двойные неравенства.

Решить системы неравенств:

а) $\begin{cases} 2x - \frac{3x-1}{2} > \frac{2}{3} \\ 10x - 2 \geq 1 + 4x \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x^2 - 29x + 30 \leq 0 \\ 5x + 2 > 3x^2 \end{cases}$

Указать наименьшее целое решение для каждой системы:

а) $\begin{cases} 2x - \frac{3x-1}{2} > \frac{2}{3} \\ 10x - 2 \geq 1 + 4x \end{cases}$

Решим каждое неравенство в отдельности:

$2x - \frac{3x-1}{2} > \frac{2}{3} \quad | \cdot 6$

$12x - 3(3x-1) > 4$

$12x - 9x + 3 > 4$

$3x > 1$

$x > \frac{1}{3}$

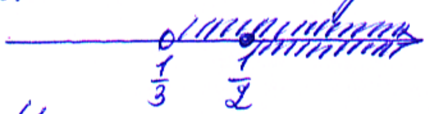
$10x - 2 \geq 1 + 4x$

$10x - 4x \geq 1 + 2$

$6x \geq 3$

$x \geq \frac{1}{2}$

Изобразим на числовой оси найденные промежутки. Найдем их пересечение



$x \in [\frac{1}{2}; +\infty)$

Наименьшим целым решением системы будет число $x = 1$.

б) $\begin{cases} 6x^2 - 29x + 30 \leq 0 \\ 5x + 2 > 3x^2 \end{cases}$

Решим каждое неравенство в отдельности.

$6x^2 - 29x + 30 \leq 0$

$D = (-29)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 30 = 121; \sqrt{D} = 11$

$x_1 = \frac{29+11}{12} = \frac{40}{12} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$

$x_2 = \frac{29-11}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

$5x + 2 > 3x^2$

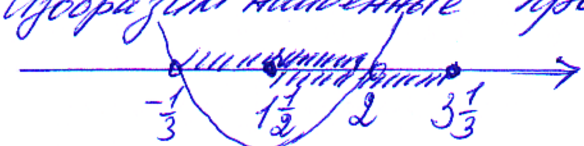
$5x + 2 - 3x^2 > 0$

$3x^2 - 5x - 2 < 0$

$D = 25 - 4 \cdot 3(-2) = 49; \sqrt{D} = 7$

$x_1 = \frac{5+7}{6} = 2 \quad x_2 = \frac{5-7}{6} = -\frac{1}{3}$

Изобразим найденные промежутки на числовой оси:



$x \in [1\frac{1}{2}; 2)$

Натуральных чисел, принадлежащих данному промежутку, нет. Однозначного ответа дать нельзя.

Решить двойные неравенства. В ответе указать наибольшее целое решение.

а) $x \le x^2+20 \le 9x$ б) $0 < \frac{x-3}{x+5} < \frac{1}{2}$

Решение

а) $x \le x^2+20 \le 9x$

Данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x \le x^2+20 \\ x^2+20 \le 9x \end{cases}$$

Решим каждое неравенство в отельности:

$x \le x^2+20$

$x - x^2 - 20 \le 0$

$x^2 - x + 20 \ge 0$

~~$x_1=$~~ $D = 1 - 4\cdot 1\cdot 20 = -79 < 0$

При любых $x \in R$ $x^2 - x + 20 > 0$.

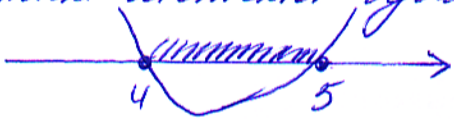
$x \in (-\infty; +\infty)$

$x^2 + 20 \le 9x$

$x^2 - 9x + 20 \le 0$

$x_1 = 4 \quad x_2 = 5$.

Т.к. первое неравенство верно при любых x, то решением системы будет решение второго неравенства.



$x \in [4;5]$

Наибольшим целым решением неравенства является число $x = 5$.

б) $0 < \frac{x-3}{x+5} < \frac{1}{2}$

Данное неравенство равносильно системе:

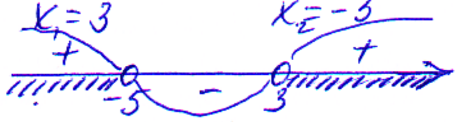
$$\begin{cases} \frac{x-3}{x+5} > 0 \\ \frac{x-3}{x+5} < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Решим каждое неравенство в отдельности.

$\frac{x-3}{x+5} > 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+5) > 0$; $x \ne -5$.

$x - 3 = 0 \qquad x+5=0$

$x = 3 \qquad x = -5$



$x \in (-\infty; -5) \cup (3; +\infty)$

$\frac{x-3}{x+5} < \frac{1}{2}$; $\frac{x-3}{x+5} - \frac{1}{2} < 0$; $x \ne -5$

$\frac{2(x-3)-(x+5)}{2(x+5)} < 0$

$\frac{2x-6-x-5}{2(x+5)} < 0$; $\frac{x-11}{2(x+5)} < 0$.

$x_1 = 11 \quad x_2 = -5$

$x \in (-5; 11)$

Объединим найденные промежутки

$x \in (3; 11)$

Наибольшим целым решением неравенства является число:
$x = 10$.

Задачи для самостоятельного решения:

~~а)~~ 1 Линейные и квадратные неравенства.

Решить неравенство. В ответе указать наибольшее целое решение.

а) $x(x+3) > (x+3)(x+1)$ б) $\frac{9x+2}{10} - \frac{10x-2}{9} > 2$

в) $\frac{3x-1}{2} + x - \frac{x+4}{4} < 3$ г) $\frac{2x-8}{3} - \frac{3x-5}{4} \geq 4$

д) $-x^2 - 5x + 6 \geq 0$ е) $x+2-x^2 \geq 0$.

2 Решение неравенств методом интервалов.

Решить неравенство. В ответе указать наибольшее целое отрицательное решение.

а) $x^3 - 4x < 0$ б) $x(x+2)(3-x) > 0$.

в) $\frac{x+4}{x-3} > 0$ г) $\frac{x^2+x}{x-3} \leq 0$.

3 Рациональные неравенства.

Решить неравенство. В ответе указать наименьшее целое решение.

а) $\frac{x-10}{2-x} > 1$ б) $\frac{1}{x-3} \leq -\frac{1}{10}$.

в) $\frac{3-2x}{x^2+3} \geq 1$ г) $\frac{x^2-3}{x^2-1} \geq 1$

д) $\frac{14x}{x+1} < \frac{9x-30}{x-4}$ е) $\frac{x+7}{x-5} + \frac{3x+1}{2} \geq 0$.

4 Неравенства с модулем.

Решить неравенство. В ответе указать наименьшее целое положительное решение.

а) $|5-2x| > 1$ б) $|x+3| \geq x$

в) $x^2 - |5x+6| > 0$ г) $|x-6| < x^2 - 5x + 9$

д) $|x^2-2x-8| > 2x$ е) $|2x-1| + |x-3| \leq 4$.

5 Системы неравенств. Двойные неравенства.

Решить системы неравенств. В ответе указать наименьшее целое решение.

а) $\begin{cases} 12-11x < 11x+10 \\ 17(3x-1)-50x+1 < 2(x+4) \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+5x-6<0 \\ x^2+4x\le 0 \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{1}{x} \le -\frac{1}{2} \\ \frac{6-x}{x+3} \ge 0. \end{cases}$

Решить двойное неравенство. В ответе указать наибольшее целое решение.

а) $x < 3-x \le 11$

б) $-1 \le x^2+x < 12$

в) $1 < \frac{1+x}{1-x} \le 2$

г) $0 < \frac{3x-1}{2x+5} < 1.$