

Решение задает при помощи уравнений.

Примеры решения задач.

① Задачи на движение.

а) Мотоциклисту необходимо преодолеть трассу в 30 км. Стартовав на 3 минуты раньше в 3 минуты, он двигался со скоростью, превышающей расчетную на $1 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, поэтому финишировал вовремя. С какой скоростью двигался мотоциклист?

б) Расстояние по реке между двумя пристанями составляет 21 км. От одной пристани в другую отправляется лодка и затем возвращается назад, потратив на весь путь 3,5 часа. Зная, что скорость течения $2,5 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, определить собственную скорость лодки.

в) Два туриста на велосипедах одновременно выехали навстречу друг другу из двух городов, расстояние между которыми составляет 28 км. Через 1 ч они встретились и, не останавливаясь, продолжили движение в той же скорости. Какой скорости выехали из велосипедистов, если первый прибыл в пункт назначения на 35 минут быстрее второго?

Решение.

а) Пусть мотоциклист планировал двигаться со скоростью $x \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}}\right)$, а двигался со скоростью $x+1 \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}}\right)$. По плану его время движения составляло $t_1 = \frac{30}{x}$ (ч), но фактически оно составило $t_2 = \frac{30}{x+1}$ (ч). Зная, что на старте он завершал на 3 мин = $\frac{3}{60}$ ч = $\frac{1}{20}$ ч, а финишировал вовремя, имеем: $t_1 - t_2 = \frac{1}{20}$. Отсюда следует:

$$\frac{30}{x} - \frac{30}{x+1} = \frac{1}{20} \quad | \cdot 20x(x+1)$$

$$20 \cdot 30(x+1) - 30x \cdot 20 = x(x+1)$$

$$600x + 600 - 600x = x^2 + x$$

$$x^2 + x - 600 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot (-600) = 2401; \quad \sqrt{D} = 49.$$

$$x_1 = \frac{-1 + 49}{2} = 24 \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}}\right)$$

$$x_2 = \frac{-1 - 49}{2} = -25 \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}}\right) - \text{не подходит.}$$

Мотоциклист двигался со скоростью: $24 + 1 = 25 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

б) Пусть скорость лодки в стоячей воде x ($\frac{\text{км}}{\text{ч}}$), тогда по течению она двинется со скоростью $x+2,5$ ($\frac{\text{км}}{\text{ч}}$) а против течения - со скоростью $x-2,5$ ($\frac{\text{км}}{\text{ч}}$). Путь по течению займет $t_1 = \frac{21}{x+2,5}$ (ч), а против течения - $t_2 = \frac{21}{x-2,5}$ ($\frac{\text{км}}{\text{ч}}$). В оба конца лодка совершит путь за $t = t_1 + t_2 = 3,5$ (ч)

Имеем:

$$\frac{21}{x-2,5} + \frac{21}{x+2,5} = 3,5 \quad | \cdot (x-2,5)(x+2,5)$$

$$21(x+2,5) + 21(x-2,5) = 3,5(x-2,5)(x+2,5)$$

$$21x + 52,5 + 21x - 52,5 = 3,5(x^2 - 6,25)$$

$$42x = 3,5(x^2 - 6,25) \quad | : 0,7$$

$$60x = 50(x^2 - 6,25)$$

$$50x^2 - 60x - 312,5 = 0 \quad | : 2,5$$

$$20x^2 - 24x - 125 = 0$$

$$D = 576 - 4 \cdot 20 \cdot (-125) = 10546; \quad \sqrt{D} = \sqrt{10546} = 2\sqrt{2644} = 4\sqrt{661}$$

$$x_1 = \frac{24 + 4\sqrt{661}}{40} = \frac{6 + \sqrt{661}}{10}$$

$$x_2 = \frac{24 - 4\sqrt{661}}{40} < 0 \quad (\text{не подходит.})$$

Ответ: $\frac{6 + \sqrt{661}}{10}$ ($\frac{\text{км}}{\text{ч}}$)

в) Пусть первый турист едет со скоростью x ($\frac{\text{км}}{\text{ч}}$), а второй - y ($\frac{\text{км}}{\text{ч}}$). Тогда время поездки I туриста составит $\frac{28}{x}$ (ч), а второго - $\frac{28}{y}$ (ч). Т.к. I прибыл в пункт назначения на 35 мин раньше получаем: $\frac{28}{y} - \frac{28}{x} = \frac{35}{60}$. Т.к. встреча произошла через 1ч, то каждый из туристов за это время проделал путь $t \cdot x$ и $t \cdot y$ (км), это составило 28 км. Имеем $x + y = 28$

$$\begin{cases} x + y = 28 \\ \frac{28}{y} - \frac{28}{x} = \frac{7}{12} \end{cases} \quad \text{Из I уравнения получим: } y = 28 - x. \\ \text{Подставив во II уравнение, получим:}$$

$$\frac{28}{28-x} - \frac{28}{x} = \frac{7}{12} \quad | \cdot 12x(28-x)$$

$$28 \cdot 12x - 28 \cdot 12(28-x) = 84 \cdot 7x(28-x)$$

$$336x - 9408 + 336x = 196x - 7x^2$$

$$7x^2 + 336x + 336x - 196x - 9408 = 0$$

$$7x^2 + 476x - 9408 = 0 \quad | : 7$$

$$x^2 + 68x - 1344 = 0$$

$$x_1 = D = 68^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1344) = 10000; \sqrt{D} = 100$$

$$x_1 = \frac{-68 + 100}{2} = 16 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$$

$$x_2 = \frac{-68 - 100}{2} = -84 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \text{ (не подходит)}$$

Найдем скорость второго велосипедиста: $y = 28 - 16 = 12 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

② Задачи на совместную работу.

а) Пароход грузится двумя бригадами одновременно за $4\frac{1}{2}$ часа. За какое время каждая из бригад загрузит пароход, работая в отдельности, если первый способен сделать на 8 ч быстрее второго.

б) Две бригады железнодорожников, работая одновременно, могут выполнить ремонт пути за 12 дней. Работу начала первая бригада, но через 4 дня ее перевели на другой участок и ремонт закончила вторая бригада за 24 дня. В какой срок может данную работу сделать первая бригада?

Решение

а) Пусть первый бригада загрузит пароход за x часов, а второй за $x+8$ часов. За 1 час первый бригада выполнит $\frac{1}{x}$ часть работы, а второй $\frac{1}{x+8}$ часть работы. Всяю работу посчитаем за 1. Значит, что 2 бригады загрузят пароход за $4\frac{1}{2}$ часа = $4\frac{12}{60}$ ч = $4\frac{1}{5}$ ч = $\frac{21}{5}$ ч, получим, что за 1 ч загрузят $\frac{1}{\frac{21}{5}}$ часть парохода. Составим уравнение:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+8} = \frac{5}{21} \quad | \cdot 21x(x+8)$$

$$21(x+8) + 21x = 5x(x+8)$$

$$21x + 168 + 21x = 5x^2 + 40x$$

$$5x^2 + 40x - 21x - 21x - 168 = 0$$

$$5x^2 - 2x - 168 = 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 5 \cdot (-168) = 3364; \sqrt{D} = 58$$

$$x_1 = \frac{2 + 58}{10} = 6 \text{ ч}$$

$$x_2 = \frac{2 - 58}{10} = -5,6 \text{ ч (не подходит)}$$

Второй бригада загрузит пароход за $6+8=14$ часов.

б) Пусть 1 бригада сделает ремонт пути за x дней, а 2- за y дней. Из того, что работая одновременно, они могут отремонтировать путь за 12 дней, следует, что за 1 день

они выполняют $\frac{1}{12}$ часть работы, а за $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$ части работы соответственно. Имеем уравнение: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$
 За 4 дня I бригада сделала $\frac{4}{x}$ часть работы, а II бригада за 24 дня сделала $\frac{24}{y}$ часть работы. Вся работа принята за 1.
 Получим уравнение: $\frac{4}{x} + \frac{24}{y} = 1$. Имеем систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \\ \frac{4}{x} + \frac{24}{y} = 1 \end{cases} \text{ Приведем к общему знаменателю получим:}$$

$$\begin{cases} \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{12} \\ \frac{4y+24x}{xy} = 1 \end{cases} ; \begin{cases} 12x+12y = xy \\ 4y+24x = xy \end{cases} \text{ Приравняем уравнения:}$$

$$12x+12y = 4y+24x$$

$$3x+3y = y+6x$$

$$2y = 3x \Rightarrow y = \frac{3}{2}x. \text{ Подставим в I уравнение:}$$

$$\frac{1}{\frac{3}{2}x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{2}{3x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{5}{3x} = \frac{1}{12} \quad | \cdot 3$$

$$\frac{5}{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 20 \text{ (дней)}$$

③ Задачи на проценты и смеси:

а) От куска провода отрезали часть, составляющую 72% его длины. Длина оставшейся части составляет 45,2 м. Сколько метров провода было в куске?

б) Имеется лом стали двух сортов с содержанием никеля в 5% и 40%. Сколько нужно взять каждой из сортов, чтобы получить 140 т. стали с содержанием никеля в 30%?

в) Одна бочка содержит смесь високоты с водой в отношении 2:3, а вторая - в отношении 3:4. Сколько литров смеси нужно взять из каждой бочки, чтобы приготовить смесь воды с високотой в отношении 3:5 в количестве 12 л.

а) Пусть длина лотка x м., это составляет 100%. Т.к. от него осталось 45,2 м, значит отрезали $x - 45,2$ м., это составляет 72%. Имеем:

$$x \text{ м} \Leftrightarrow 100\%$$

$$x - 45,2 \Leftrightarrow 72\% \quad \text{Составим пропорцию:}$$

$$\frac{x}{x - 45,2} = \frac{100}{72}$$

$$72x = 100(x - 45,2)$$

$$72x = 100x - 4520$$

$$100x - 72x = 4520$$

$$28x = 4520$$

$$x = 161 \frac{12}{28} = 161 \frac{3}{7} \text{ м.}$$

б) Пусть потребуется x т. лома I сорта и y т. лома II сорта. Т.к. мы получили 140 т сплава, имеем уравнение: $x + y = 140$. Никеля в I сплаве 5%, это составляет $0,05x$ т., а во II сплаве 40%, это составляет $0,4y$ т. В полученном сплаве содержится 30% никеля, это составляет $0,3 \cdot 140 = 28$ т. Имеем уравнение: $0,05x + 0,4y = 28$

$$\begin{cases} x + y = 140 \\ 0,05x + 0,4y = 28 \end{cases}$$

Из I уравнения получим: $x = 140 - y$. Подставим во II уравнение:

$$0,05(140 - y) + 0,4y = 28$$

$$7 - 0,05y + 0,4y = 28$$

$$0,35y = 21$$

$$y = 20 \text{ т.}$$

$$x = 140 - 20 = 120 \text{ т.}$$

в) Т.к. в I бочке содержится смесь в отношении 2:3, то, в ней содержится 5 частей смеси, из которых кислота составляет 2 части. Значит, ее доля в смеси равна $\frac{2}{5}$. Во второй бочке содержится смесь в отношении 3:7, т.е. 10 частей. Из них кислота составляет 3 части, т.е. ее доля $\frac{3}{10}$. Приготавливаемая смесь имеет отношение 3:5 (8 частей), значит доля кислоты в ней составляет $\frac{3}{8}$. Пусть потребуется x л. I смеси и y л. второй смеси.

Т.к. было приготовлено 12 л новой смеси, имеем $x + y = 12$.
 В I смеси вискозита было $\frac{2}{5}x$ л., во II - $\frac{3}{10}y$ л., в новой смеси будет $\frac{3}{8} \cdot 12 = \frac{9}{2}$ л. вискозита. Получим $\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}y = \frac{9}{2}$

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ \frac{2}{5}x + \frac{3}{10}y = \frac{9}{2} \end{cases} \quad \left| \cdot 10 \right. \quad \begin{cases} x + y = 12 \\ 4x + 3y = 45 \end{cases}$$

Из I уравнения получим: $x = 12 - y$. Подставив во II уравнение

$$4 \cdot (12 - y) + 3y = 45$$

$$48 - 4y + 3y = 45$$

$$-y = -3$$

$$y = 3 \text{ л.}$$

$$x = 12 - 3 = 9 \text{ л.}$$

④ Задачи на цифровую запись чисел

а) Найти двузначное число, зная, что его единиц на 2 больше числа десятков, а произведение искомого числа на сумму его цифр равно 144.

б) Если число разделить на сумму его цифр, то в частном получим 6, а в остатке 2, если это же число разделить на произведение его цифр, то в частном получим 5 и 2 в остатке. Найти это число.

Решение

а) Пусть I цифра числа x (десятки), а во II цифра y (единицы). Само число составляет: $x \cdot 10 + y = 10x + y$. Т.к. в произведении его на сумму цифр имеем 144, значит:
 $(10x + y) \cdot (x + y) = 144$. Поскольку единиц на 2 больше, чем десятков, имеем: $y - x = 2$. Получим систему:

$$\begin{cases} y - x = 2 \\ (10x + y)(x + y) = 144 \end{cases}$$

Из I уравнения: $y = x + 2$

$$(10x + x + 2)(x + x + 2) = 144$$

$$(11x + 2)(2x + 2) = 144$$

$$22x^2 + 22x + 4x + 4 - 144 = 0$$

$$22x^2 + 26x - 140 = 0 \quad | :2$$

$$11x^2 + 13x - 70 = 0$$

$$D = 169 - 4 \cdot 11 \cdot (-70) = 3249; \sqrt{D} = 57$$

$$x_1 = \frac{-13 + 57}{22} = 2$$

$$x_2 = \frac{-13 - 57}{22} = -\frac{70}{22} \text{ (не подходит, т.к. не является натуральным числом.)}$$

$$y = 2 + 2 = 4$$

Искомое число: 24

б) Если число a делится на число b с остатком q и неполным частным p , то справедливо равенство:

$$a = p \cdot b + q$$

Пусть первая цифра числа - x (десяти), а вторая - y (единицы). Само число будет $x \cdot 10 + y = 10x + y$. При делении его на сумму цифр получим: $\frac{10x+y}{x+y} \div 10x+y = 6(x+y) + 2$.

При делении его на произведение цифр получим: $10x+y = 5xy + 2$. Составим систему:

$$\begin{cases} 10x+y = 6(x+y) + 2 \\ 10x+y = 5xy + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x+y = 6x+6y+2 \\ 10x+y = 5xy+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-5y=2 \\ 10x+y-5xy=2 \end{cases}$$

Из 1 уравнения: $4x = 2 + 5y; x = \frac{2+5y}{4}$

$$10 \cdot \frac{2+5y}{4} + y + \frac{5y(2+5y)}{4} = 2 \quad | \cdot 4$$

$$20 + 50y + 4y - 10y - 25y^2 = 8$$

$$-25y^2 + 44y + 12 = 0$$

$$25y^2 - 44y - 12 = 0$$

$$D = 1936 - 4 \cdot 25 \cdot (-12) = 3136; \sqrt{D} = 56$$

$$y_1 = \frac{44 + 56}{50} = 2$$

$$y_2 = \frac{44 - 56}{50} = -\frac{12}{50} = -\frac{6}{25} \text{ (не является натуральным числом)}$$

$$x = \frac{2 + 5 \cdot 2}{4} = 3$$

Искомое число - 32.

⑤ Задачи, не относящиеся к специальным типам.

а) Несколько студентов решили купить набор футбольных мячей стоимостью 72 р. Если бы их было трое человек и меньше, то каждому пришлось бы заплатить на 4 р больше. Сколько было студентов?

б) Магазин получил 64 раструны разной емкости, причем раструны меньшей стоимостью на 4 р. дешевле раструна большей емкости. За раструны большей емкости получили доход в 100р, за раструны меньшей емкости - 36р. Сколько было тех и других раструнов?

Решение.

а) Пусть было x студентов, каждый из которых внес y р. Получили $xy = 72$. Если бы студентов было на 3 человека меньше, т.е. $x-3$, но каждый бы внес на 4 р. больше, то все равно бы была собрана сумма 72 р. Получим:

$$(x-3)(y+4) = 72$$

Составим систему:

$$\begin{cases} xy = 72 \\ (x-3)(y+4) = 72 \end{cases}; \begin{cases} xy = 72 \\ xy + 4x - 3y - 12 = 72 \end{cases}; \begin{cases} xy = 72 \\ 42 + 4x - 3y - 12 = 72 \end{cases}$$

$$4x - 3y = 12$$

$$x = \frac{12+3y}{4}$$

$$y \cdot \frac{12+3y}{4} = 72 \cdot 4$$

$$y(12+3y) = 288$$

$$3y^2 + 12y - 288 = 0$$

$$y^2 + 4y - 96 = 0$$

$$y_1 = -12 \quad y_2 = 8 \text{ р.}$$

$$x = \frac{12+3 \cdot 8}{4} = 9 \text{ студентов.}$$

б) Пусть было x больших раструнов, значит маленьких было $64-x$ (раструнов). Пусть большая раструна стоит y рублей, а малая - $(y-1)$ рублей. За большие раструны выручили: $xy = 100$ руб, за малые - $(64-x)(y-1) \text{ руб.} = 36 \text{ руб}$

Получим систему:

$$\begin{cases} xy = 100 \\ (64-x)(y-1) = 36 \end{cases}$$

$$64y + x = 200$$

$$x = 200 - 64y$$

$$\begin{cases} xy = 100 \\ 64y - 64 - xy + x = 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 100 \\ 64y - 64 - 100 + x = 36 \end{cases}$$

$$y(200 - 64y) = 100$$

$$200y - 64y^2 = 100 \quad | : (-4)$$

$$16y^2 - 50y + 25 = 0$$

$$D = 2500 - 4 \cdot 25 \cdot 16 = 900 \quad \sqrt{D} = 30$$

$$y_1 = \frac{50 + 30}{32} = \frac{80}{32} = 2.5 \text{ р.}$$

$$y_2 = \frac{50 - 30}{32} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8} \text{ р.}$$

$$x_1 = 200 - 64 \cdot 2.5 = 40 \text{ вастёрков больших.}$$

$$x_2 = 200 - 64 \cdot \frac{5}{8} = 160 > 64 \text{ (противоречит условию задачи)}$$

$$\text{Малых вастёрков привезли: } 64 - 40 = 24 \text{ вастёрков.}$$

Задачи для самостоятельного решения:

① Задачи на движение.

- а) Дачник проехал 3 км по шоссе и 6 км по грунтовой дороге, потратив на весь путь 2 ч. По шоссе его скорость была на $2 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ большей, чем на грунтовой дороге. С какой скоростью дачник шёл по шоссе?
- б) Поезд был задержан на станции на 16 мин и ликвидировал отставание на перегоне длиной 80 км, идя со скоростью на $10 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ большей, чем по расписанию. Найти скорость поезда по расписанию.
- в) Рыбак проплыл на лодке 6 км против течения реки, а потом 15 км по озеру, из которого вытекает река. На путь по озеру он потратил на 1 ч меньше, чем на путь по реке. Зная, что скорость течения $2 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, найти скорость лодки в стоячей воде.
- г) Расстояние между двумя портами на реке 80 км. Пароход проходит этот путь в два конца за 8 ч 20 мин. Зная, что скорость течения $4 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, найти собственную скорость парохода.
- д) Расстояние между пунктами А и Б 12 км. У обоих пунктов навстречу друг другу одновременно отправились пешеход и велосипедист. Встреча произошла через 20 мин. Пешеход прибыл в пункт Б на 1 ч 30 мин позже, чем велосипедист в А. Найти скорость пешехода.
- ② Задачи на работу.
- а) Два штукатура, работая вместе, могут оштукатурить комнату за 8 ч. Первый, работая самостоятельно, выполнит эту работу на 12 ч быстрее второго, работающего отдельно. За какое время эту работу сделает второй штукатур?
- б) Два мастера могут пошить требуемое количество костюмов за 6 дней, работая вместе. Работая отдельно, первая мастеровская справится с этим заданием на 5 дней быстрее второй. За какое время сможет выполнить работу первая мастеровская?

6) Бассейн наполняется двумя насосами за 2 ч. 55 мин. За какое время наполнит бассейн первый насос, работая один, если эту работу он выполняет на 2 ч быстрее второго насоса?

7) Две бригады строителей, работая вместе, построили дом за 12 дней. Если бы первая бригада выполнила половину работы, а потом вторая - другую половину, то дом был бы построен за 25 дней. За какое время вторая бригада может построить дом?

8) Поле было вспахано двумя тракторами за 15 ч, причем первый трактор проработал в работе на 4 ч позже второго. Известно, что первый трактор может вспахать это поле на 5 ч быстрее второго. За какое время первый трактор вспашет поле?

3) Задачи на проценты.

а) Зарплата рабочего была 240 руб. В течение года ее поднимали дважды: сначала на 15%, а потом - на 20%. Сколько рабочий стал получать в конце года?

б) Морская вода содержит 5% соли (по весу). Сколько литров пресной воды надо прибавить к 40 л морской воды, чтобы содержание соли в ней составило 2%?

в) Имеется руда с содержанием меди в 6% и 11%. Сколько "бедной" руды надо взять, чтобы при смешивании с "богатой" рудой получить 20 т. руды с содержанием меди 8%.

г) Комиссионный магазин купил часы и фотосаппарат за 225 руб и вскоре их продал, получив 40% прибыли. Известно, что часы были наценены на 25%, а фотосаппарат - на 50%. За какую сумму магазин купил часы?

4) Задачи на числа.

а) Сумма цифр неизвестного двузначного числа равна 6. Если к этому числу прибавить 18, то получим число, записанное теми же цифрами в обратном порядке. Какое это число?

б) Найти двузначное число, которое на 12 больше суммы квадратов его цифр и на 16 больше удвоенного произведения его цифр

в) Если неизвестное двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получим 8, а в остатке 7. При делении этого числа на число, записанное теми же цифрами в обратном порядке, в частном получаем 4 и в остатке 3. Найти это число.