Системы алгебраических уравнений

Примеры решения задач.

① **Способ алгебраического сложения.**

Решить системы уравнений. Среди решений найти такое, для которого сумма $x+y$ принимает наибольшее значение. В ответ записать значение этой суммы.

а) $\begin{cases} 5x-7y=3 \\ 6x+5y=17 \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{3}=6 \\ \frac{x+y}{4}-\frac{x-3}{3}=0 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+x+y=10 \\ 2x+y=4 \end{cases}$

Решение

а) $\begin{cases} 5x-7y=3 \\ 6x+5y=17 \end{cases}$

Уравняем по модулю коэффициенты при неизвестной y. Для этого I уравнение умножим на 5, а ~~в~~ II – на 7.

$\begin{cases} 25x-35y=15 \\ 42x+35y=119 \end{cases}$ Сложим почленно уравнения.

$67x=134$

$x=2.$

Подставив $x=2$ в I уравнение, получим:

$10-7y=3$

$-7y=-7$

$y=1.$

Сумма $x+y=2+1=3.$

б) $\begin{cases} \frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{3}=6 \\ \frac{x+y}{4}-\frac{x-y}{3}=0 \end{cases}$ Сложим уравнения системы. Получим:

$\frac{x+y}{2}+\frac{x+y}{4}=6$

$\frac{2(x+y)+(x+y)}{4}=6$

$\frac{3(x+y)}{4}=6 \,|:3$

$\frac{x+y}{4}=2$

$x+y=8$ Подставив в I уравнение получим:

$\frac{8}{2} + \frac{x-y}{3} = 6$

$4 + \frac{x-y}{3} = 6$

$\frac{x-y}{3} = 2$

$x - y = 6$

Таким образом, система после всех преобразований примет вид:

$\begin{cases} x - y = 6 \\ x + y = 8 \end{cases}$ Еще раз сложим уравнения системы

$2x = 14$

$x = 7$

Подставив в I уравнение $x = 7$, получим:

$7 - y = 6$

$y = 1.$

Сумма $x + y = 7 + 1 = 8.$

в) $\begin{cases} x^2 + x + y = 10 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

Вычтем из первого уравнения второе:

$x^2 + x + y - 2x - y = 10 - 4$

$x^2 - x = 6$

$x^2 - x - 6 = 0$

$x_1 = 3 \quad x_2 = -2.$

Подставив оба значения во II уравнение, получим

$x_1 = 3: \ 6 + y = 4; \ y_1 = -2$

$x_2 = -2: -4 + y = 4; \ y_2 = 8.$

Для пары $x_2 = -2; y_2 = 8$ сумма $x + y$ принимает наибольшее значение: $x + y = -2 + 8 = 6.$

② Способ подстановки

Решить системы уравнений. Среди решений найти такое, для которого сумма $x + y$ принимает наибольшее значение. В ответ записать значение этой суммы.

а) $\begin{cases} 3x+5y=21 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=17 \\ y-3x=1 \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4} \\ x+y=18 \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2+xy=3 \\ x+y=3 \end{cases}$

Решение.

а) $\begin{cases} 3x+5y=21 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ Выразим из II уравнения неизвестную y через x:

$2x-y=1$; $-y=1-2x$; $y=2x-1$.

Подставим значение y в I уравнение. Получим уравнение с одним неизвестным:

$3x+5\cdot(2x-1)=21$

$3x+10x-5=21$

$13x=26$

$x=2$

Вычислим значение неизвестной $y=2\cdot2-1=3$

Сумма $x+y=2+3=5$.

б) $\begin{cases} x^2+y^2=17 \\ y-3x=1 \end{cases}$ Выразим из II уравнения неизвестную y через x:

$y-3x=1$

$y=1+3x$

Подставим значение y в I уравнение. Получим:

$x^2+(1+3x)^2=17$

$x^2+1+6x+9x^2=17$

$10x^2+6x-16=0$

$5x^2+3x-8=0$.

$D=9-4\cdot5\cdot(-8)=169$; $\sqrt{D}=13$.

$x_1=\frac{-3+13}{10}=1$ $x_2=\frac{-3-13}{10}=-1{,}6$

Вычислим значения неизвестной y:

$x_1=1$: $y=1+3\cdot1=4$; $y_1=4$

$x_2=-1{,}6$: $y=1+3\cdot(-1{,}6)=1-4{,}8=-3{,}8$; $y_2=-3{,}8$.

Для пары $x_1=1$, $y_1=4$ сумма $x+y$ принимает наибольшее значение: $x+y=4+1=5$.

в) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4} \\ x+y=18 \end{cases}$ В данном случае в I уравнении есть смысл привести дроби к общему знаменателю:

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$; $\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{4}$; $x+y=\frac{1}{4}xy$

С учетом II уравнения получим

$\frac{1}{4}xy=18$; $xy=72$

Из I уравнения выразим неизвестную x через y

$x+y=18$; $x=18-y$

Подставим в полученное ранее равенство:

$(18-y)\cdot y=72$

$18y-y^2=72$

$y^2-18y+72=0.$

$y_1=12$ $y_2=6.$

Вычислим значения неизвестной x:

$y_1=12$: $x=18-12=6$; $x_1=6$

$y_2=6$: $x=18-6=12$; $x_2=12$

Для обеих пар решений сумма: $x+y=6+12=18.$

г) $\begin{cases} x^2+xy=3 \\ x+y=3 \end{cases}$ Разложим ~~от~~ I уравнение на множители:

$x^2+xy=3$; $x(x+y)=3.$

С учетом II уравнения получим:

$x\cdot 3=3$; $x=1$

Подставив $x=1$ во II уравнение получим:

$1+y=3$; $y=2$

Сумма $x+y=2+1=3$.

3) Введение новых неизвестных.

Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{34}{15} \\ x^2+y^2=34 \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy-\frac{x}{y}=\frac{16}{3} \\ xy-\frac{y}{x}=\frac{9}{2} \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy+x+y=11 \\ x^2y+xy^2=30 \end{cases}$

д г) $\begin{cases} \cancel{x+y+xy=7} \\ \cancel{x^2+y^2+xy=13} \end{cases}$

Решение.

а) $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{34}{15} \\ x^2+y^2=34 \end{cases}$ Дроби в I уравнении являются обратными, т.к. $\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}=1$.

Пусть $\frac{x}{y}=t$, тогда $\frac{y}{x}=\frac{1}{t}$. I уравнение примет вид:

$t+\frac{1}{t}=\frac{34}{15} \,\Big|\cdot 15t$

$15t^2+15=34t$

$15t^2-34t+15=0.$

$D=1156-4\cdot15\cdot15=256;\ \sqrt{D}=16.$

$t_1=\frac{34+16}{30}=\frac{50}{30}=\frac{5}{3}$ $t_2=\frac{34-16}{30}=\frac{18}{30}=\frac{3}{5}.$

Имеем 2 случая:

1) $t=\frac{5}{3}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{5}{3}\Rightarrow x=\frac{5}{3}y$. Подставим во II уравнение:

$\cancel{x^2+\frac{25}{9}}$ $\frac{25}{9}y^2+y^2=34$

$\frac{34}{9}y^2=34$

$\frac{1}{9}y^2=1$

$y^2=9$

$y_1=3$ $y_2=-3.$

Вычислим значения x:

$y_1=3$ $x_1=\frac{5}{3}\cdot3=5$

$y_2=-3$ $x_2=\frac{5}{3}\cdot(-3)=-5.$

2) $t=\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{3}{5}\Rightarrow x=\frac{3}{5}y$. Подставим во II уравнение.

$\frac{9}{25}y^2+y^2=34$

$\frac{34}{25}y^2=34;$ $\frac{1}{25}y^2=1;$ $y^2=25$

$y_3=5$ $y_4=-5.$

Вычислим значения x:

$x_3=\frac{3}{5}\cdot5=3$

$x_4=\frac{3}{5}\cdot(-5)=-3$

Ответ: $x_1=5$ $y_1=3$; $x_2=-5$ $y_2=-3$; $x_3=3$ $y_3=5$; $x_4=-3$ $y_4=-5.$

б) $\begin{cases} xy - \frac{x}{y} = \frac{16}{3} \\ xy - \frac{y}{x} = \frac{9}{2} \end{cases}$ Пусть $xy = a$, $\frac{x}{y} = в$, тогда $\frac{y}{x} = \frac{1}{в}$

Система примет вид:

$\begin{cases} a - в = \frac{16}{3} \\ a - \frac{1}{в} = \frac{9}{2} \end{cases}$ Из I уравнения получим: $a = \frac{16}{3} + в$

Подставим во II уравнение:

$\frac{16}{3} + в - \frac{1}{в} = \frac{9}{2} \quad | \cdot 6в$

$32в + 6в^2 - 6 = 18 \cdot 27в$

$6в^2 + 32в - 27в - 6 = 0$

$6в^2 - 5в - 6 = 0$

$D = 25 - 4 \cdot 6 \cdot (-6) = 169 \quad \sqrt{D} = 13$

$в_1 = \frac{5+13}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \qquad в_2 = \frac{5-13}{12} = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3}$

Вычислим значение a:

$a_1 = \frac{16}{3} + \frac{3}{2} = \frac{432+9}{6} = \frac{41}{6} \qquad a_2 = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$.

Возвращаясь к старым неизвестным, получим две системы:

1) $\begin{cases} xy = \frac{41}{6} \\ \frac{x}{y} = \frac{3}{2} \end{cases}$ Из II уравнения получим $x = \frac{3}{2}y$. Подставим в I уравнение:

$\frac{3}{2}y \cdot y = \frac{41}{6}$

$\frac{3}{2}y^2 = \frac{41}{6}$

$9y^2 = 41$

$y^2 = \frac{41}{9}$

$y_1 = \frac{\sqrt{41}}{3}$; $y_2 = -\frac{\sqrt{41}}{3}$.

Вычислим значение x:

$x_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{41}}{3}$; $x_1 = \frac{\sqrt{41}}{2}$

$x_2 = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{41}}{3}\right)$; $x_2 = -\frac{\sqrt{41}}{2}$

2) $\begin{cases} xy = \frac{14}{3} \\ \frac{x}{y} = -\frac{2}{3} \end{cases}$ Из II уравнения получим: $x = -\frac{2}{3}y$. Подставим в I уравнение:

$-\frac{2}{3}y^2=\frac{14}{3}$

$y^2=-7$ – нет решений.

Ответ: $x_1=\frac{\sqrt{41}}{2}$ $y_1=\frac{\sqrt{41}}{3}$; $x_2=-\frac{\sqrt{41}}{2}$ $y_2=-\frac{\sqrt{41}}{3}$.

в) $\begin{cases} x+y+xy=11 \\ x^2y+xy^2=30 \end{cases}$

Данная система является симметрической (она не изменит своего вида, если поменять неизвестные местами). Решаются такие системы с помощью симметрических подстановок: $a=x+y$ $b=xy$. Система примет вид:

$\begin{cases} a+b=11 \\ ab=30 \end{cases}$ Из I уравнения получим: $a=11-b$. Подставим во II уравнение:

$b(11-b)=30$

$11b-b^2=30$

$b^2-11b+30=0.$

$b_1=6$ $b_2=5$

Вычислим значение a:

$a_1=11-6=5$ $a_2=11-5=6.$

Получим 2 системы:

1) $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$ Из I уравнения имеем $x=5-y$

$y(5-y)=6$

$5y-y^2=6$

$y^2-5y+6=0$

~~$D=$ $y_1=6$ $y_2=$~~ $y_1=2$ $y_2=3.$

Тогда: $x_1=5-2=3$ $x_2=5-3=2$

2) $\begin{cases} x+y=6 \\ xy=5 \end{cases}$ Из I уравнения имеем: $x=6-y$

$y(6-y)=5$

$6y-y^2=5$

$y^2-6y+5=0$

$y_3=1$ $y_4=5$

Тогда: $x_3 = 6 - 1 = 5$ $x_4 = 6 - 5 = 1$.

Ответ: $x_1 = 3$ $y_1 = 2$; $x_2 = 2$ $y_2 = 3$; $x_3 = 5$ $y_3 = 1$; $x_4 = 1$ $y_4 = 5$.

Задачи для самостоятельного решения.

1) Решить систему уравнений методом сложения. Среди решений системы указать такое, для которого сумма $x+y$ максимальна. В ответ записать значение этой суммы.

а) $\begin{cases} x-3y=17 \\ 5x+3y=-5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+5y=15 \\ 3x+8y=-1 \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x-y=13 \\ x+2y=-1 \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2+x+y=6 \\ y-x=3 \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x^2+3x+y^2=52 \\ 3x^2-4x+y^2=40 \end{cases}$ е) $\begin{cases} \frac{x+y+4}{5}+\frac{x-y-4}{7}=9 \\ \frac{x+y+4}{5}-\frac{x-y-4}{7}=1. \end{cases}$

2) Решить систему уравнений методом подстановки. Среди решений системы указать такое, для которого сумма $x+y$ максимальна. В ответ записать значение этой суммы.

а) $\begin{cases} 11x-5y=37 \\ 4y-x=25 \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{7}{4}x-y=-5 \\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{7}y=3 \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ \frac{5}{3-2x}=\frac{3}{2-2y} \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y=5 \\ x^2-xy+y^2=7 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x-y=2 \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ xy=6 \end{cases}$

е) $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=12 \\ y-x=6 \end{cases}$ ж) $\begin{cases} \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{1}{2} \\ x-y=\frac{1}{10} \end{cases}$ з) $\begin{cases} x^2-y^2=16 \\ x+y=8 \end{cases}$

3) Решить систему уравнений при помощи метода введения новых неизвестных.

а) $\begin{cases} \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{5}{6} \\ x^2-y^2=5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{13}{6} \\ xy=5 \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2xy-3\frac{x}{y}=15 \\ xy+\frac{x}{y}=15 \end{cases}$

г) $\begin{cases} \frac{1}{3x}-\frac{1}{2y}=\frac{1}{3} \\ \frac{1}{9x^2}-\frac{1}{4y^2}=\frac{1}{4} \end{cases}$ д) $\begin{cases} 3xy+x+y=23 \\ 2(x+y)-xy=4 \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2y+xy^2=12 \\ xy+x+y=7 \end{cases}$