Алгебраические уравнения.

Примеры решения задач

① Линейные уравнения.

Решить уравнения

а) $7-2(x-4{,}5)=6-4x$

б) $(x+2)^2-5(x-4)=(x-6)(x+6)$

в) $\frac{3x-11}{4}-\frac{3-5x}{8}=\frac{x+6}{2}$

Решение

а) Раскроем скобки, после чего все члены, содержащие неизвестное, перенесем в левую часть, а свободные члены – в правую

$7-2(x-4{,}5)=6-4x$

$7-2x+9=6-4x$

$-2x+4x=6-7-9$

$2x=-10$

$x=-5$

б) Раскроем скобки, после чего все члены, содержащие неизвестное перенесем в левую часть, а свободные члены – в правую. При раскрытии скобок будем использовать формулы сокращенного умножения.

$(x+2)^2-5(x-4)=(x-6)(x+6)$

$x^2+4x+4-5x+20=x^2-36$

$x^2+4x-5x-x^2=-36-20-4$

$-x=-60$

$x=60$

в) Умножим обе части уравнения на общий знаменатель (в данном случае на 8)

$\frac{3x-11}{4}-\frac{3-5x}{8}=\frac{x+6}{2} \,|\cdot 8$

$\frac{8(3x-11)}{4}-\frac{8(3-5x)}{8}=\frac{8(x+6)}{2}$

$2(3x-11)-(3-5x)=4(x+6)$

$6x-22-3+5x=4x+24$

$6x+5x-4x=24+22+3$

$7x=49$

$x=7.$

② Квадратные уравнения

а) $x^2-16=0$

б) $7x-4x^2=0$

в) $x^2-6x+9=0$

г) $2x^2+x-3=0$

Решение.

а) Данное уравнение является неполным. Перенесем свободный член в правую часть и извлечем из обеих частей квадратный корень

$x^2-16=0$

$x^2=16$

$x=\sqrt{16}$

$x_1=4 \quad x_2=-4$

б) Данное уравнение является неполным. Вынесем за скобку общий множитель, таким образом уравнение распадется на два.

$7x-4x^2=0$

$x(7-4x)=0$

$x_1=0$ или $7-4x=0$

$-4x=-7$

$x=\frac{7}{4}$

$x_2=1\frac{3}{4}$

в) Данное уравнение является полным, но представляет собой полный квадрат.

$x^2-6x+9=0$

$(x-3)^2=0$

$x-3=0$

$x=3$.

г) Данное уравнение является полным квадратным уравнением с $a=2$, $b=1$, $c=-3$. По формуле корней квадратного уравнения имеем:

$2x^2+x-3=0$

$D=b^2-4ac=1^2-4\cdot(-3)\cdot 2=1+24=25$

$\sqrt{D}=5$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-1+5}{4}=1.$

$x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-1-5}{4}=-1{,}5.$

③ Рациональные уравнения.
Решить уравнение. Если уравнение имеет несколько корней, в ответе записать их сумму.

а) $\frac{5x+1}{x+1}=\frac{x+2}{x}$

б) $\frac{2}{x^2-4}+\frac{x-4}{x(x+2)}=\frac{1}{x^2-2x}$

Решение

а) Найдем область допустимых значений, исключив те значения неизвестной, при которых знаменатели дробей обращаются в ноль. После обе части умножим на общий знаменатель

$\frac{5x+1}{x+1}=\frac{x+2}{x}$

ОДЗ: $x+1\neq 0 \Rightarrow x\neq -1;\ x\neq 0.$

$\frac{(5x+1)(x+1)\cdot x}{x+1}=\frac{(x+2)(x+1)\cdot x}{x}$

$(5x+1)\cdot x=(x+2)(x+1)$

$5x^2+x=x^2+x+2x+2$

$5x^2+x-x^2-x-2x-2=0$

$4x^2-2x-2=0$

$2x^2-x-1=0$

$D=(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-1)=9;\ \sqrt{D}=3.$

$x_1=\frac{1+3}{4}=1 \quad x_2=\frac{1-3}{4}=-0{,}5$

Оба корня входят в ОДЗ. Их сумма: $x_1+x_2=1-0{,}5=0{,}5$

б) Найдем область допустимых значений. Разложив знаменатели дробей на множители, определим общий знаменатель, после чего умножим обе части уравнения на него:

$\frac{2}{x^2-4}+\frac{x-4}{x(x+2)}=\frac{1}{x^2-2x}$

ОДЗ: $x^2-4\neq 0$ | $x(x+2)\neq 0$ | $x^2-2x\neq 0$

$(x-2)(x+2)\neq 0$ | $x\neq 0 \quad x\neq -2$ | $x(x-2)\neq 0$

$x\neq 2 \quad x\neq -2$ ~~(для других др.~~ | | $x\neq 0 \quad x-2\neq 0$

$x\neq 2.$

Окончательно имеем: $x\neq 0;\ x\neq 2;\ x\neq -2.$

$\frac{2}{(x-2)(x+2)}+\frac{x-4}{x(x+2)}=\frac{1}{x(x-2)}\Big|\cdot x(x-2)(x+2)$

$$\frac{2x(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)}+\frac{(x-4)\cdot x\cdot(x-2)(x+2)}{x(x+2)}=\frac{x(x-2)(x+2)}{x(x-2)}$$

$2x+(x-4)(x-2)=x+2$

$2x+x^2-2x-4x+8-x-2=0$

$x^2-5x+6=0$

$D=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=1$; $\sqrt{D}=1$.

$x_1=\frac{5+1}{2}=3$

$x_2=\frac{5-1}{2}=2$ (не подходит)

Т.к. в ОДЗ входит только один корень ($x=3$), то ответом будет его значение.

④ Уравнения, приводимые к квадратным. Метод введения новых неизвестных.

Решить уравнения

а) $x^4-4x^2=5$.

б) $(x^2+x+1)^2-3x^2-3x=1$.

в) $\frac{24}{x^2+4x}+(x+2)^2=18$.

г) $x(x+2)(x+3)(x+5)=72$

д) $\frac{x-6}{x-12}-\frac{x-12}{x-6}=\frac{5}{6}$

Решение.

а) Данное уравнение является биквадратным. Оно сводится к квадратному при помощи введения новой неизвестной $y=x^2$, тогда $x^4=(x^2)^2=y^2$. Получим:

$x^4-4x^2=5$

$y^2-4y=5$

$y^2-4y-5=0$

$D=(-4)^2-4\cdot(-5)\cdot1=36$; $\sqrt{D}=6$.

$y_1=\frac{+4+6}{2}=5$ $y_2=\frac{4-6}{2}=-1$.

Вернемся к старой неизвестной:

1) $x^2=5$ 2) $x^2=-1$ (нет смысла, т.к. $x^2\geq0$)

$x_1=\sqrt{5}$ $x_2=-\sqrt{5}$

б) $(x^2+x+1)^2-3x^2-3x=1$.

Вынесем за скобку множитель (-3):

$(x^2+x+1)^2-3(x^2+x)=1$.

Заметим, что уравнение содержит повторяющуюся группу x^2+x. Обозначим ее как новую неизвестную $y=x^2+x$, отчего уравнение упростится:

$(y+1)^2-3y=1$.

$y^2+2y+1-3y-1=0$

$y^2-y=0$

$y(y-1)=0$

$y_1=0$ или $y-1=0$

$y_2=1$.

Вернемся к старой неизвестной. Рассмотрим 2 случая:

1) $x^2+x=0$

$x(x+1)=0$

$x_1=0$ или $x+1=0$

$x_2=-1$.

2) $x^2+x=1$

$x^2+x-1=0$

$D=1^2-4\cdot(-1)\cdot1=5$; $\sqrt{D}=\sqrt{5}$

$x_3=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ $\quad x_4=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

в) $\dfrac{24}{x^2+4x}+(x+2)^2=18$.

Найдем область определения:

$x^2+4x\neq0$

$x(x+4)\neq0$

$x\neq0$ $x\neq-4$

В левой части раскроем скобки:

$\dfrac{24}{x^2+4x}+x^2+4x+4=18$

Обозначим повторяющуюся часть x^2+4x как новое неизвестное $y=x^2+4x$. Получим:

$\dfrac{24}{y}+y+4=18 \,|\cdot y$

$24+y^2+4y=18y$.

$y^2+4y-18y+24=0$.

$y^2-14y+24=0$

$D=196-4\cdot 24=100;\ \sqrt{D}=10.$

$y_1=\frac{14+10}{2}=12 \quad y_2=\frac{14-10}{2}=2$

Вернемся к старой неизвестной. Рассмотрим 2 случая:

1) $x^2+4x=12$

$x^2+4x-12=0$

$D=16-4\cdot(-12)=16+48=64;\ \sqrt{D}=8$

$x_1=\frac{-4+8}{2}=2 \quad x_2=\frac{-4-8}{2}=-6$

2) $x^2+4x=2$

$x^2+4x-2=0$

$D=16-4\cdot(-2)\cdot 1=24;\ \sqrt{D}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}.$

$x_3=\frac{-4+2\sqrt{6}}{2}=-2+\sqrt{6} \quad x_4=\frac{-4-2\sqrt{6}}{2}=-2-\sqrt{6}$

Все 4 корня входят в ОДЗ.

г) $x(x+2)(x+3)(x+5)=72.$

Данное уравнение является уравнением 4ой степени вида $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=k$. Его можно решить методами элементарной математики, при условии, что: $a+b=c+d$ или $a+c=b+d$. Для этого скобки, содержащие соответствующие свободные члены, перемножают. В нашем случае $a=0$. Перегруппируем уравнение:

$x(x+5)(x+2)(x+3)=72$

Заметим, что выше указанное условие выполняется:

$5+0=2+3$

Выполним умножение

$(x^2+5x)(x^2+2x+3x+6)=72$

$(x^2+5x)(x^2+5x+6)=72$

Введем новую неизвестную $y=x^2+5x$. Получим:

$y(y+6)=72$

$y^2+6y-72=0.$

$D=36-4\cdot 1\cdot(-72)=324;\ \sqrt{D}=18.$

$y_1=\frac{-6+18}{2}=6 \quad y_2=\frac{-6-18}{2}=-12.$

Вернемся к старой неизвестной. Рассмотрим 2 случая:

*

1) $x^2+5x=6$

$x^2+5x-6=0$.

$x_1=-6 \quad x_2=1$.

2) $x^2+5x=-12$

$x^2+5x+12=0$.

$D=25-4\cdot12=-23$ - нет корней.

д) $\frac{x-6}{x-12}-\frac{x-12}{x-6}=\frac{5}{6}$. ОДЗ: $x\neq12; x\neq6$

Заметим, что обе дроби в левой части являются обратными, т.к. $\frac{x-6}{x-12}\cdot\frac{x-12}{x-6}=1$. Введем новую неизвестную, обозначив ~~ду~~ как $y=\frac{x-6}{x-12}$, а $\frac{x-12}{x-6}=\frac{1}{y}$. Получим:

$y-\frac{1}{y}=\frac{5}{6} \Big| \cdot 6y$

$6y^2-6=5y$

$6y^2-5y-6=0$

$D=25-4\cdot6\cdot(-6)=169 \quad \sqrt{D}=13$

$y_1=\frac{5+13}{12}=\frac{18}{12}=\frac{3}{2} \quad y_2=\frac{5-13}{12}=-\frac{8}{12}=-\frac{2}{3}$

Вернемся к старой неизвестной. Рассмотрим 2 случая:

1) $\frac{x-6}{x-12}=\frac{3}{2} \Big| \cdot 2(x-12)$

$2(x-6)=3(x-12)$

$2x-12=3x-36$

$2x-3x=12-36$

$-x=-24$

$x_1=24$

2) $\frac{x-6}{x-12}=-\frac{2}{3} \Big| \cdot 3(x-12)$

$3(x-6)=-2(x-12)$

$3x-18=-2x+24$

$3x+2x=18+24$

$5x=42$

$x=\frac{42}{5}$

$x_2=8{,}4$.

Оба корня входят в ОДЗ.

(5) Уравнения, содержащие неизвестное под знаком модуля.
Решить уравнения:

а) $|3x+1|+x=9$

б) $x^2+|x-2|=10$

в) $|4-x|+|x-2|=2$

г) $|x^2-4x|=5$

Решение.

а) Найдем критическую точку уравнения, т.е. такое значение неизвестной, при которой подмодульное выражение становится равным нулю:

$3x+1=0$
$x=-\frac{1}{3}$

При $x \geq -\frac{1}{3}$ $3x+1 \geq 0$ и по определению модуля имеем: $|3x+1|=3x+1$. Подставив в уравнение, получим

$3x+1+x=9$
$4x=8$
$x_1=2$

Данное значение удовлетворяет условию $x \geq -\frac{1}{3}$ и является корнем уравнения

При $x < -\frac{1}{3}$ $3x+1<0$. Получим: $|3x+1|=-(3x+1)=-3x-1$

$-3x-1+x=9$

$-2x=10$

$x_2=-5$.

Данное значение удовлетворяет условию $x < -\frac{1}{3}$ и является корнем уравнения

б) $x^2+|x-2|=10$

Критическая точка уравнения $x=2$. При $x \geq 2$ выражение $x-2 \geq 0$, а значит $|x-2|=x-2$. Получим:

$x^2+x-2=10$
$x^2+x-12=0$
$x_1=3$ $x_2=-4$ (не подходит)

Корнем является только значение $x=3$, т.к. $x=-4$ не удовлетворяет условию $x \geq 2$

При $x<2$ выражение $x-2$ отрицательно, а это значит, что $|x-2| = -(x-2) = 2-x$. Получим

$$x^2+2-x=10$$
$$x^2-x-8=0$$
$$D=1-4\cdot 1\cdot(-8)=33 \quad \sqrt{D}=\sqrt{33}.$$
$$x_3=\frac{1+\sqrt{33}}{2} \text{ (не подходит)}$$
$$x_4=\frac{1-\sqrt{33}}{2}$$

Корнем является только значение $x=\frac{1-\sqrt{33}}{2}$, т.к. $x=\frac{1+\sqrt{33}}{2}$ не удовлетворяет условию $x<2$.

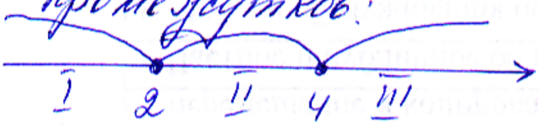
в) $|4-x|+|x-2|=2$

Найдем критические точки уравнения:

$4-x=0 \quad x-2=0$

$x=4 \quad\quad x=2$

Нанесем критические точки на числовую ось. Получим три промежутка. Раскроем знак модуля на каждом из промежутков:



I: $x\in(-\infty;2]$. На этом промежутке $4-x>0$ а $x-2\leq 0$, и значит: $|4-x|=4-x$; $|x-2|=-(x-2)=2-x$. Получим

$$4-x+2-x=2$$
$$-2x=-4$$

$x=2$ – входит в рассматриваемый промежуток.

II: $x\in(2;4]$. На этом промежутке $4-x>0$ и $x-2>0$, а это значит, что $|4-x|=4-x$; $|x-2|=x-2$. Получим:

$$4-x+x-2=2$$
$$2=2$$

Уравнение тождественно удовлетворяется при любом $x\in(2;4]$, значит весь этот промежуток является решением.

III: $x\in(4;+\infty)$. На этом промежутке $4-x<0$ а $x-2>0$, а это значит, что $|4-x|=-(4-x)=x-4$; $|x-2|=x-2$. Получим

$$x-4+x-2=2$$
$$2x=8$$

$x=4$ – не входит в рассматриваемый промежуток

Объединив все решения, получим $x\in[2;4]$

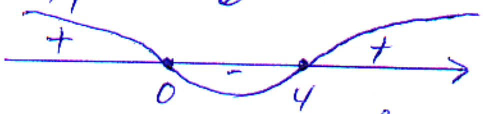
г) $|x^2-4x|=5$

Найдем критические точки:

$x^2-4x=0$

$x(x-4)=0$

$x_1=0 \quad x_2=+4$



На промежутках $(-\infty;0]\cup[4;+\infty)$ выражение x^2-4x положительно, а на промежутке $(0;4)$-отрицательно. Имеем 2 случая:

1) $x^2-4x\geq 0 \Rightarrow |x^2-4x|=x^2-4x$. Получим

$x^2-4x=5$

$x^2-4x-5=0$

$x_1=5 \quad x_2=-1$

Оба корня принадлежат промежутку $(-\infty;0]\cup[4;+\infty)$

2) $x^2-4x<0 \Rightarrow |x^2-4x|=-(x^2-4x)=4x-x^2$. Получим:

$4x-x^2=5$

$4x-x^2-5=0$

$x^2-4x+5=0.$

$D=16-4\cdot5\cdot1=-4$ - нет корней.

Задачи для самостоятельного решения:

① Решить линейные уравнения.

а) $2x-3+4(x-1)=5$; б) $9x-2(x-3,5)=2x-1,5$;

в) $(x-3)^2-x(x+4)=15-10x$; г) $\frac{x-1}{5}-\frac{2x}{3}=4$;

д) $\frac{x-3}{6}+x=\frac{2x-1}{3}-\frac{4-x}{2}$; е) $\frac{17}{5x}=2-\frac{7}{x}$

② Решить квадратные уравнения. Если уравнение имеет несколько корней, в ответ записать наименьший.

а) $6x^2-3x=0$ б) $3x-20x^2=0$

в) $8-2x^2=0$ г) $4x^2-4x+1=0$

д) $16x^2-24x+9=0$ е) $x^2-3x+4=0$

ж) $3x^2-5x-2=0$

③ Решить рациональные уравнения если уравнение имеет несколько корней, в ответе записать их сумму:

а) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x+2}=1$ б) $\frac{x}{x+1}+\frac{x+2}{x-2}=1$

в) $\frac{1}{x}=\frac{3}{x^2+2}$ г) $\frac{2}{x+3}+\frac{4}{x+7}=1$

д) $\frac{6-x}{1-x^2}-\frac{x+3}{x-x^2}=\frac{x+5}{x+x^2}$

④ Используя метод введения новых неизвестных решить уравнения. В ответе привести наибольший из корней.

а) $x^4-11x^2+30=0$ б) $2x^4-5x^2+2=0$

в) $(2x^2+3x)^2+10=14x^2+21x$ г) $(x^2-5x)^2-30(x^2-5x)=216$

д) $\frac{1}{x^2+2x+4}-\frac{1}{x^2+2x+5}=\frac{1}{12}$ е) $x(x+1)(x+2)(x+3)=24$.

⑤ Решить уравнения с модулем.

а) $|6-2x|=3x+1$ б) $|x-4|=2x-7$

в) $|x+3|+|2x-1|=8$ г) $|5-2x|+|x-3|=2-3x$

д) $|x^2+x|+3x=5$ е) $|x^2-1|=5-x$