Многогранники (призма, пирамида).

Примеры решения задач.

(I) Призма:

1.) В основании призмы лежит квадрат. Высота призмы равна 15см, а диагональ – 17см. Найти полную поверхность призмы.

2) Найти площадь полной поверхности прямой призмы, в основании которой лежит равнобедренный треугольник с основанием 8см и проведенной к нему высотой 3см. Диагональ боковой грани, содержащей основание треугольника, равна 17см.

3) Стороны основания прямоугольного параллелепипеда относятся как 3:5, а диагонали боковых граней равны 10см и $2\sqrt{41}$ см. Найти объем параллелепипеда.

4) В основании прямого параллелепипеда лежит ромб. Найти площадь боковой поверхности параллелепипеда, если площади его диагональных сечений равны 6 см^2 и 8 см^2.

5) В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной 5см и основанием 8см. Высота призмы равна меньшей высоте основания. Найти объем призмы.

6) В основании прямой призмы лежит равнобокая трапеция, основания которой 4см и 16см, а диаметр вписанной окружности вдвое меньше диагонали призмы. Найти ее объем.

7) Меньшая сторона основания прямоугольного параллелепипеда равна 6см, а угол между диагоналями основания равен 60°. Найти площадь боковой поверхности, если диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол 30°.

8) Длины диагоналей граней прямоугольного параллелепипеда равны 13см, 15см, и $\sqrt{106}$ см. Найти объем параллелепипеда.

9) Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и образует с основанием угол α, а с плоскостью боковой грани – угол β. Найти объем параллелепипеда.

10) Через одну из вершин правильной треугольной призмы и противоположную ей сторону нижнего основания проведено сечение имеющее площадь Q и образующее с плоскостью основания угол φ. Найти объем призмы.

12) В основании призмы лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен a, а прилежащий к нему угол – β. Диагональ грани, содержащей гипотенузу, образует с гранью, содержащей второй катет угол α. Найти площадь полной поверхности.

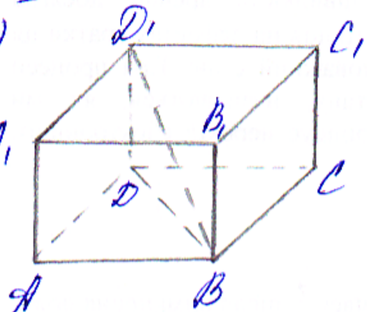
13) Основанием призмы является равнобедренный треугольник с углом 2α при вершине и радиусом вписанной окружности, равным r. Диагональ боковой грани, содержащей боковую сторону треугольника, образует с основанием угол β. Найти объем призмы.

14) Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция, у которой диагональ равна b, а угол между диагональю и большим основанием равен α. Диагональ призмы наклонена к основанию под углом β. Найти объем призмы.

15) Дана правильная треугольная призма объема V. Какова должна быть сторона ее основания, чтобы полная поверхность призмы была наименьшей?

Решение.

1)



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – призма; $ABCD$ – квадрат; $DD_1 = 15$ см, $BD_1 = 17$ см.

Найти: $S_п$

$S_п = S_{осн} + S_{бок}$; $S_{осн} = AB^2$; $S_{бок} = P_{осн} \cdot h$.

1) $\triangle BDD_1$ – прямоугольный; $BD_1^2 = BD^2 + D_1D^2$ (т. Пифагора); $BD^2 = BD_1^2 - DD_1^2 = 17^2 - 15^2 = 289 - 225 = 64$; $BD = \sqrt{64} = 8$ см.

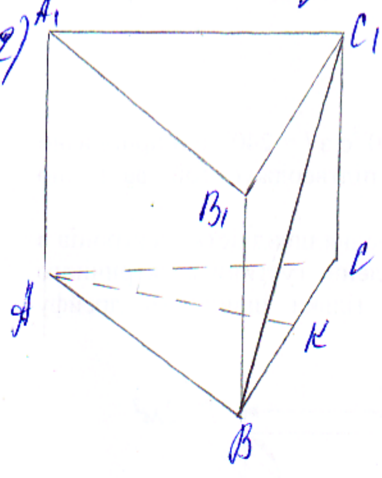
2) $\triangle ADB$ – прямоугольный, равнобедренный: $AD = AB$, $\angle ABD = 45°$

$\cos\angle ABD = \dfrac{AB}{BD} \Rightarrow AB = BD\cos\angle ABD = 8 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$ см.

Периметр основания: $P_{осн} = 4AB = 16\sqrt{2}$, площадь основания: $S_{осн} = AB^2 = (4\sqrt{2})^2 = 32$ см^2. Вычислим боковую поверхность призмы: $S_б = P_{осн} \cdot h = 16\sqrt{2} \cdot 15 = 240\sqrt{2}$ см^2

Полная поверхность призмы: $S_п = S_{осн} + S_б = 32 + 240\sqrt{2} = 32(1 + 7{,}5\sqrt{2})$ см^2

2)



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – призма, $\triangle ABC$ – равнобедр. $BC = 8$ см; $AK \perp BC$; $AK = 3$ см; $BC_1 = 17$ см.

Найти: $S_п$

Полная поверхность призмы: $S_п = S_б + S_{осн}$.

Площадь основания: $S_{осн} = \frac{1}{2} BC \cdot AK$

$S_{осн} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12$ см^2

Боковая поверхность призмы: $S_{бок} = P_{осн} \cdot h$

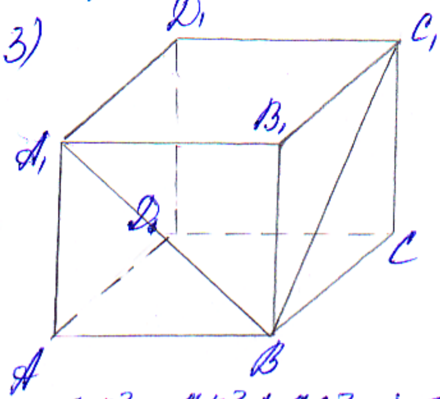
1) $\triangle ABK$ – прямоугольный (AK – высота и медиана $\triangle ABC$)

$BK = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$ см; $AB^2 = AK^2 + BK^2$ (т. Пифагора)

$AB^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$; $AB = \sqrt{25} = 5$ см.

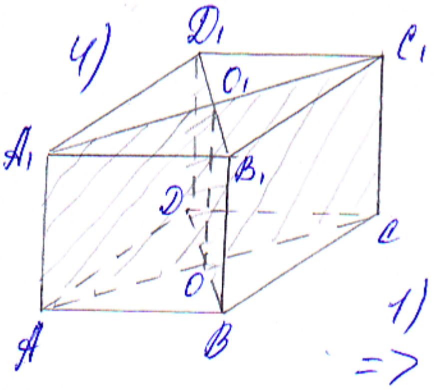
2) ΔBCC_1 - прямоугольный: $BC_1^2 = BC^2 + CC_1^2$ (th. Пифагора)
$CC_1^2 = BC_1^2 - BC^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225$; $CC_1 = \sqrt{225} = 15$ см.
Найдем периметр основания: $P_{осн} = 2AB + BC = 2\cdot 5 + 8 = 18$ см
Боковая поверхность призмы: $S_б = 18 \cdot 15 = 270$ см^2; Полная поверхность: $S_п = 12 + 270 = 282$ см^2.

3)



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - прямоугольный параллелепипед; $AB : BC = 3:5$; $A_1B = 10$ см; $BC_1 = 2\sqrt{41}$ см
Найти: V - ?
1) Введем коэффициент пропорциональности x. Тогда $AB = 3x$, $BC = 5x$.
2) ΔAA_1B - прямоугольный:
$A_1B^2 = AB^2 + AA_1^2$; $AA_1^2 = A_1B^2 - AB^2 = 10^2 - (3x)^2 = 100 - 9x^2$
3) ΔBCC_1 - прямоугольный: $BC_1^2 = BC^2 + CC_1^2$ (th Пифагора)
$CC_1^2 = BC_1^2 - BC^2 = (2\sqrt{41})^2 - (5x)^2 = 164 - 25x^2$
Т.к. $CC_1 = AA_1$, то:
$100 - 9x^2 = 164 - 25x^2$; $25x^2 - 9x^2 = 164 - 100$; $16x^2 = 64$; $x^2 = 4$, $x = 2$.
Значит $AB = 3\cdot 2 = 6$ см; $BC = 5 \cdot 2 = 10$ см.
$AA_1^2 = 100 - 9\cdot 2^2 = 64$; $AA_1 = \sqrt{64} = 8$ см
4) Найдем объем: $V = AB \cdot BC \cdot AA_1 = 10 \cdot 6 \cdot 8 = 480$ см^3

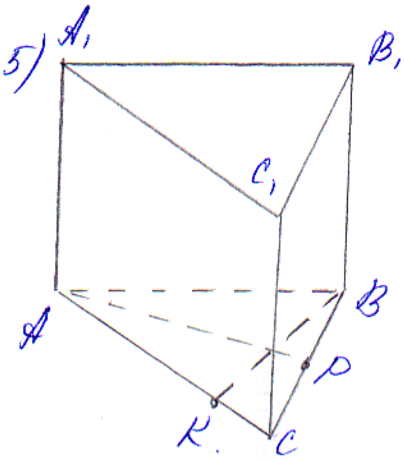
4)



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - призма; $ABCD$ - ромб; AA_1C_1C, BDD_1B_1 - диагональные сечения
$S_{AA_1C_1C} = 6$ см^2; $S_{BDD_1B_1} = 8$ см^2
Найти: $S_б$
1) AA_1B_1C - прямоугольник, $S_{AA_1C_1C} = AC \cdot AA_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow AC = \dfrac{S_{AA_1C_1C}}{AA_1}$
2) BDD_1B_1 - прямоугольник, $S_{BDD_1B_1} = BD \cdot BB_1 \Rightarrow BD = \dfrac{S_{BDD_1B_1}}{BB_1}$
3) ΔAOB - прямоугольный: $AB^2 = AO^2 + BO^2$ (th. Пифагора)
$AO = \frac{1}{2} AC = \dfrac{S_{AA_1C_1C}}{2AA_1}$; $BO = \frac{1}{2} BD = \dfrac{S_{BDD_1B_1}}{2AA_1}$ (т.к. $BB_1 = AA_1$)
$AB^2 = \dfrac{S^2_{AA_1C_1C}}{4AA_1^2} + \dfrac{S^2_{BDD_1B_1}}{4AA_1^2} \Big| \cdot 4AA_1^2$
$4AA_1^2 \cdot AB^2 = S^2_{AA_1C_1C} + S^2_{BDD_1B_1}$. Но $AA_1 \cdot AB = S_{AA_1B_1B}$, тогда
$4S^2_{AA_1B_1B} = S^2_{AA_1C_1C} + S^2_{BDD_1B_1}$

$S_{AA_1B_1B} = \sqrt{\frac{S^2_{AA_1C_1C} + S^2_{BDD_1B_1}}{4}} = \sqrt{\frac{6^2+8^2}{4}} = \sqrt{\frac{100}{4}} = \sqrt{25} = 5$ см^2

4) $S_б = 4S_{AA_1B_1B} = 4\cdot 5 = 20$ см^2

5) 

Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – призма, $\triangle ABC$ – равнобедренный $BC = 8$ см, $AB = AC = 5$ см. $BK \perp AC$; $CC_1 = BK$.

Найти: V.

Из двух высот $\triangle ABC$ меньшей будет высота BK, т.к. она проведена к большей стороне.

1) $\triangle APC$ – прямоугольный (AP – высота и медиана $\triangle ABC$); $CP = \frac{1}{2}BC = 4$ см

$AC^2 = AP^2 + CP^2$ (th. Пифагора)

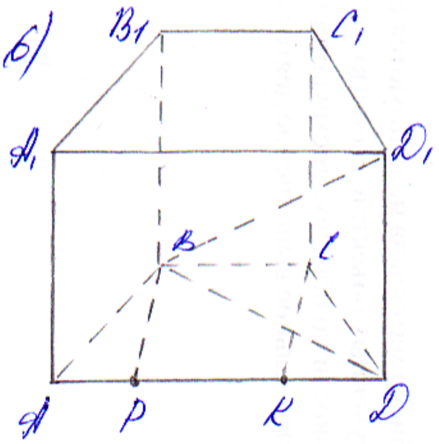
$AP^2 = AC^2 - CP^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$; $AP = \sqrt{9} = 3$ см.

2) Найдем площадь $\triangle ABC$: $S = \frac{1}{2}BC\cdot AP$; $S = \frac{1}{2}AC\cdot BK$. Получим:

$\frac{1}{2}AC\cdot BK = \frac{1}{2}BC\cdot AP \Rightarrow BK = \frac{BC\cdot AP}{AC} = \frac{8\cdot 3}{5} = \frac{24}{5} = 4,8$ см. $CC_1 = 4,8$ см.

3) Найдем объем: $V = \cancel{\frac{1}{3}} S_{осн} h$; $S_{осн} = \frac{1}{2}BC\cdot AP = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5 = 20$ см^2

$V = 20\cdot 4,8 = 96$ см^3

6) 

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – призма; $ABCD$ – равнобедренная трапеция; $BC = 4$ см; $AD = 16$ см; $BD_1 = 2BP$.

Найти: V – ?

Диаметр вписанной в трапецию окружности равен ее высоте, потому $BD_1 = 2BP$.

1) Т.к. $BCKP$ – прямоугольник, а $\triangle ABP = \triangle CDK$, то $KP = BC$, а $AP = KD$. Поэтому:

$AD = AP + KP + KD = 2AP + BC$

$2AP = AD - BC \Rightarrow AP = \frac{AD - BC}{2} = \frac{16-4}{2} = 6$ см.

2) Т.к. в трапецию можно вписать окружность, то $AD + BC = AB + CD$. Поскольку $AB = CD$, то:

$2AB = AD + BC \Rightarrow AB = \frac{AD + BC}{2} = \frac{4+16}{2} = 10$ см.

3) $\triangle ABP$ – прямоугольный: $AB^2 = AP^2 + BP^2$ (th Пифагора)

$BP^2 = AB^2 - AP^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 36$, $BP = \sqrt{64} = 8$ см. $BD_1 = 2BP = 16$ см.

4) $\triangle BDP$ – прямоугольный: $PD = PK + KD = 4 + 6 = 10$ см

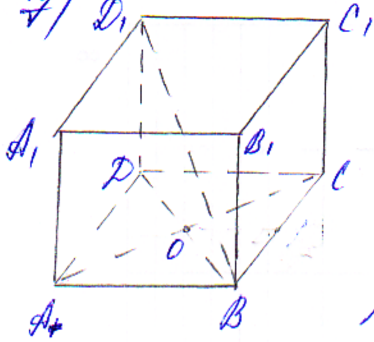
$BD^2 = BP^2 + PD^2 = 8^2 + 10^2 = 64 + 100 = 164$; $BD = \sqrt{164}$ см

5) $\triangle BDD_1$ – прямоугольный: $BD_1^2 = BD^2 + DD_1^2$ (th Пифагора)

$DD_1^2 = BD_1^2 - BD^2 = 16^2 - (\sqrt{164})^2 = 256 - 164 = 92$ ~~см~~; $DD_1 = \sqrt{92} = 2\sqrt{23}$ см.

6) Найдем объем: $V = S_{осн} h$; $S_{осн} = \frac{BC + AD}{2}\cdot BP = \frac{16+4}{2}\cdot 8 = 80$ см^2

$V = 80\cdot 2\sqrt{23} = 160\sqrt{23}$ см

7) 

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, $BC = 6$ см; $\angle COB = 60°$; $\angle DBD_1 = 30°$.

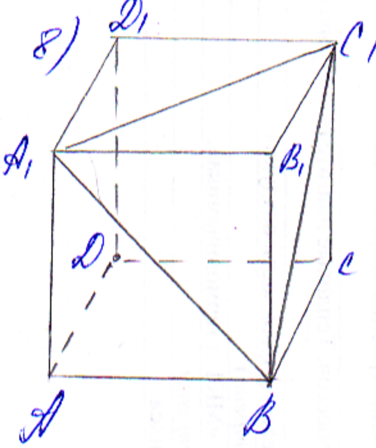
Найти: $S_б$

1) $\triangle COB$ – равнобедренный (т.к. $CO = BO$). Поскольку $\angle COB = 60°$, то $\angle CBO = \angle BCO = 60°$. Значит $\triangle COB$ – равносторонний: $BC = CO = BO = 6$ см.

2) $\triangle ABD$ – прямоугольный: $BD = 2BO = 12$ см. $AD = 6$ см;
$BD^2 = AD^2 + AB^2$ (т. Пифагора), $AB^2 = DB^2 - AD^2 = 12^2 - 6^2 = 144 - 36 = 108$
$AB = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$ см.

3) $\triangle DBD_1$ – прямоугольный: $tg\angle DBD_1 = \frac{DD_1}{BD} \Rightarrow DD_1 = BD\, tg\angle DBD_1 =$
$= 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$ см.

4) Найдем боковую поверхность: $S_б = P_{осн} \cdot h = 2(BC + AB) \cdot DD_1 =$
$= 2(6 + 6\sqrt{3}) \cdot 4\sqrt{3} = 48\sqrt{3} + 48 \cdot 3 = 144 + 48\sqrt{3}$ см^2.

8) 

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед
$A_1B = 13$ см; $BC_1 = 15$ см; $A_1C_1 = \sqrt{106}$ см.

Найти: V

Пусть $AB = x$, $BC = y$, $AA_1 = z$.

1) $\triangle AA_1B$ – прямоугольный: $AA_1^2 + AB^2 = A_1B^2$ (т. Пифагора)
$z^2 + x^2 = 13^2$; $z^2 + x^2 = 169$.

2) $\triangle BCC_1$ – прямоугольный: $BC^2 + CC_1^2 = BC_1^2$ (т. Пифагора)
$y^2 + z^2 = 15^2$; $y^2 + z^2 = 225$.

3) $\triangle A_1B_1C_1$ – прямоугольный: $A_1B_1^2 + B_1C_1^2 = A_1C_1^2$; $x^2 + y^2 = (\sqrt{106})^2$; $x^2 + y^2 = 106$

Получим систему уравнений:

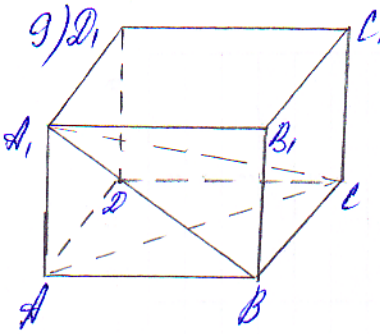
$$\begin{cases} z^2 + x^2 = 169 \\ z^2 + y^2 = 225 \\ x^2 + y^2 = 106 \end{cases}$$

Выразим из I и II уравнений соответственно x^2 и y^2:
$z^2 + x^2 = 169 \Rightarrow x^2 = 169 - z^2$; $z^2 + y^2 = 295 \Rightarrow y^2 = 295 - z^2$

Подставим эти значения в III уравнение. Получим:

$169 - z^2 + 225 - z^2 = 106$
$-2z^2 = 106 - 225 - 169$
$-2z^2 = -288$
$z^2 = 144$, $z = 12 \Rightarrow AA_1 = 12$ см.
$y^2 = 225 - z^2 = 225 - 144 = 81$; $y = \sqrt{81} = 9$; $BC = 9$ см.
$x^2 = 169 - z^2 = 169 - 144 = 25$; $x = \sqrt{25} = 5$; $AB = 5$ см.

4) Найдем объем: $V = abc = 9 \cdot 5 \cdot 12 = 540$ см^3.

9) 

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед

$A_1C = d$; $\angle ACA_1 = \alpha$; $\angle BA_1C = \beta$

Найти: V.

1) ΔACA_1 – прямоугольный: $\sin\angle ACA_1 = \frac{AA_1}{A_1C} \Rightarrow$

$AA_1 = A_1C \sin\angle ACA_1 = d\sin\alpha$

$\cos\angle ACA_1 = \frac{AC}{A_1C} \Rightarrow AC = A_1C\cos\angle ACA_1 = d\cos\alpha$.

2) ΔA_1BC – прямоугольный: $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp A_1B$ (th. о 3^х перпендикулярах)

$\sin\angle BA_1C = \frac{BC}{A_1C} \Rightarrow BC = A_1C\sin\angle BA_1C = d\sin\beta$.

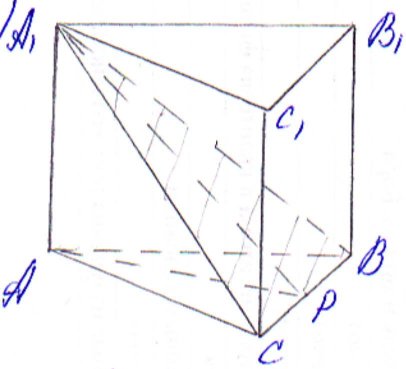
3) ΔABC – прямоугольный: $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (th. Пифагора)

$AB^2 = AC^2 - BC^2 = (d\cos\alpha)^2 - (d\sin\beta)^2 = d^2\cos^2\alpha - d^2\sin^2\beta = d^2(\cos^2\alpha - \sin^2\beta)$

$AB = \sqrt{d^2(\cos^2\alpha - \sin^2\beta)} = d\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$

4) Найдем объем: $V = abc = d\sin\beta \cdot d\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta} \cdot d\sin\alpha =$

$= d^3 \sin\alpha \sin\beta \sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$.

10) 

Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма; A_1BC – сечение; $S_{A_1BC} = Q$; $\angle APA_1 = \alpha$

Найти: V.

1) ΔABC – ортогональная проекция ΔA_1BC

По теореме о площади ортогональной проекции

$S_{ABC} = S_{A_1BC} \cdot \cos\angle A_1PA = Q\cos\alpha$.

2) ΔABC – равносторонний: $S_{ABC} = \frac{AB^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow AB = \sqrt{\frac{4S_{ABC}}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{4Q\cos\alpha}{\sqrt{3}}}$

3) Δ ACP – прямоугольный: $\angle ACP = 60°$

$\sin\angle ACP = \frac{AP}{AC} \Rightarrow AP = AC\sin\angle ACP = \sqrt{\frac{4Q\cos\alpha}{\sqrt{3}}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{4Q\cos\alpha \cdot \sqrt{3}}{4\sqrt{3}}}$

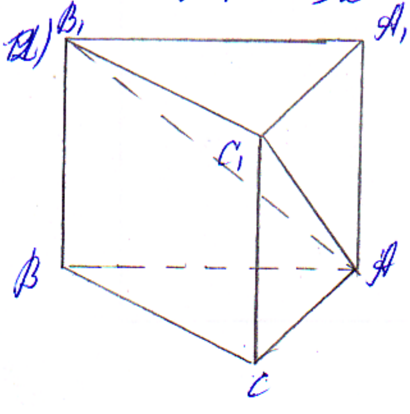
$= \sqrt{Q\cos\alpha}$

4) ΔAA_1P – прямоугольный: $\operatorname{tg}\angle APA_1 = \frac{AA_1}{AP} \Rightarrow AA_1 = AP\operatorname{tg}\angle APA_1 =$

$= \sqrt{Q\cos\alpha} \cdot \operatorname{tg}\alpha$

5) Найдем объем: $V = S_{осн} h = Q\cos\alpha \cdot \sqrt{Q\cos\alpha} \cdot \operatorname{tg}\alpha = Q\cos\alpha \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sqrt{Q\cos\alpha}$

$= Q\sin\alpha\sqrt{Q\cos\alpha}$

11) 

Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – призма; ΔABC – прямоугольный;

$BC = a$; $\angle ABC = \beta$; $\angle B_1AC_1 = \alpha$.

Найти: S

1) ΔABC - прямоугольный: $tg\beta = \frac{AC}{BC} => AC = BC\,tg\beta = a\,tg\beta$

$\cos\beta = \frac{BC}{AB} => AB = \frac{BC}{\cos\beta} = \frac{a}{\cos\beta}$. Найдем площадь ΔABC:

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC\cdot BC = \frac{1}{2}a^2 tg\beta$.

2) ΔACC_1 - прямоугольный. Пусть $CC_1 = x$. $AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2 =$

$= (a\,tg\beta)^2 + x^2 = a^2 tg^2\beta + x^2$; $AC = \sqrt{x^2 + a^2 tg^2\beta}$

3) ΔBB_1A - прямоугольный: $AB_1^2 = AB^2 + BB_1^2 = \left(\frac{a}{\cos\beta}\right)^2 + x^2 =$

$= \frac{a^2}{\cos^2\beta} + x^2 = \frac{a^2 + x^2\cos^2\beta}{\cos^2\beta}$; $AB = \frac{\sqrt{a^2 + x^2\cos^2\beta}}{\cos\beta}$

4) ΔB_1C_1A - прямоугольный (т.к. $B_1C_1 \perp A_1C_1$, то $AC_1 \perp B_1C_1$ - по th о 3х перпендикулярах): $\cos\angle B_1AC_1 = \frac{B_1C_1}{AB_1} => B_1C_1 = AB_1\cos\angle B_1AC_1$

$a = \frac{\sqrt{a^2 + x^2\cos^2\beta}}{\cos\beta}\cdot\cos\alpha$; $a\cos\beta = (\sqrt{a^2 + x^2\cos^2\beta})\cos^2\alpha$

$a^2\cos^2\beta = (a^2 + x^2\cos^2\beta)\cos^2\alpha$

$a^2\cos^2\beta = a^2\cos^2\alpha + x^2\cos^2\beta\cos^2\alpha$

$x^2\cos^2\alpha\cos^2\beta = a^2\cos^2\beta - \cos^2\alpha$

$x^2 = \frac{a^2(\cos^2\beta - \cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$; $x = \frac{a\sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha\cos\beta}$; $C_1C_1 = \frac{a\sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha\cos\beta}$

5) Найдем периметр основания: $P_{осн} = AB + BC + AC$

$P_{осн} = \frac{a}{\cos\beta} + a + a\,tg\beta = a\left(\frac{1}{\cos\beta} + 1 + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right) = \frac{a(1+\sin\beta+\cos\beta)}{\cos\beta}$

Найдем боковую поверхность призмы: $S_{бок} = P_{осн}\cdot h =$

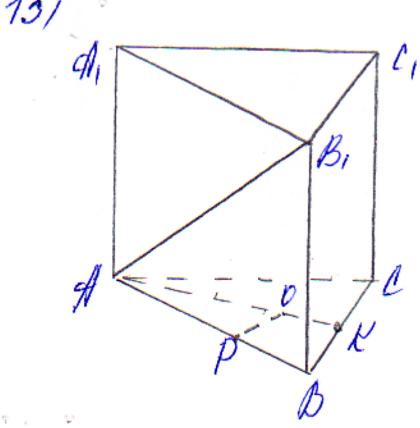
$= \frac{a(1+\sin\beta+\cos\beta)}{\cos\beta}\cdot\frac{a\sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{a^2\sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}\,(1+\sin\beta+\cos\beta)}{\cos\alpha\cos^2\beta}$

Найдем полную поверхность призмы: $S = 2S_{осн} + S_{бок}$.

$S = 2\cdot\frac{1}{2}a^2 tg\beta + \frac{a^2(1+\sin\beta+\cos\beta)\sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha\cos^2\beta} = \frac{a^2(\sin\beta\cos\beta\cos\alpha + (1+\sin\beta+\cos\beta)\sqrt{\cos^2\beta-\cos^2\alpha})}{\cos\alpha\cos^2\beta}$

$= \frac{a^2(\frac{1}{2}\sin 2\beta\cos\alpha + (1+\sin\beta+\cos\beta)\sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\alpha})}{\cos\alpha\cos^2\beta}$

43)



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ - призма; ΔABC - равнобедренный; $\angle BAC = 2\alpha$; $OK = OP = r$; $\angle BAB_1 = \beta$.

Найти: V.

1) $\triangle ABK$ - прямоугольный: $BK = \frac{1}{2}BC$; $\angle BAK = \frac{1}{2}\angle BAC = \alpha$ (т.к. AK - высота, медиана и биссектриса $\triangle ABC$)

Пусть $AB = x$. $\cos\angle BAK = \frac{AK}{AB} \Rightarrow AK = AB\cos\angle BAK = x\cos\alpha$

$\sin\angle BAK = \frac{BK}{AB} \Rightarrow BK = AB\sin\angle BAK = x\sin\alpha$; $BC = 2BK = 2x\sin\alpha$

2) По формуле радиуса вписанной окружности $r = \frac{2S}{P}$ имеем:

$2S = Pr$

Найдем площадь и периметр $\triangle ABC$: $P = 2AB + BC = 2x + 2x\sin\alpha = 2x(1+\sin\alpha)$

$S = \frac{1}{2}AK\cdot BC = \frac{1}{2}x\cos\alpha\cdot 2x\sin\alpha = x^2\cos\alpha\sin\alpha = \frac{1}{2}x^2\sin 2\alpha$.

Получим:

$2\cdot\frac{1}{2}x^2\sin 2\alpha = 2x(1+\sin\alpha)r$

$x\sin 2\alpha = 2(1+\sin\alpha)r$

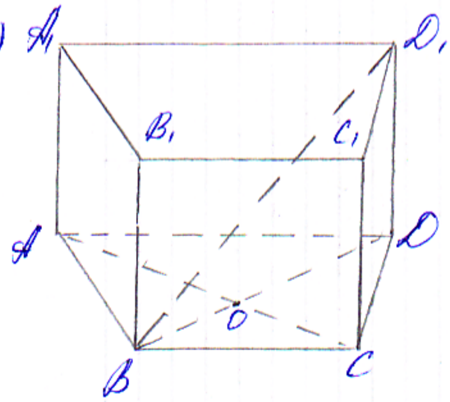
$x = \frac{2(1+\sin\alpha)r}{\sin 2\alpha}$; $AB = \frac{2r(1+\sin\alpha)}{\sin 2\alpha}$.

$S = \frac{4r^2(1+\sin\alpha)^2}{\sin^2 2\alpha}\cdot\sin 2\alpha = \frac{4r^2(1+\sin\alpha)^2}{\sin 2\alpha}$

3) $\triangle ABB_1$ - прямоугольный: $\operatorname{tg}\angle BAB_1 = \frac{BB_1}{AB} \Rightarrow BB_1 = AB\operatorname{tg}\angle BAB_1 = \frac{2r(1+\sin\alpha)}{\sin 2\alpha}\operatorname{tg}\beta = \frac{2r\operatorname{tg}\beta(1+\sin\alpha)}{\sin 2\alpha}$.

4) Найдем объем: $V = S_{осн}\cdot h = \frac{4r^2(1+\sin\alpha)^2}{\sin 2\alpha}\cdot\frac{2r\operatorname{tg}\beta(1+\sin\alpha)}{\sin 2\alpha} = \frac{8r^3\operatorname{tg}\beta(1+\sin\alpha)^3}{\sin^2 2\alpha}$

14)



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - призма, $ABCD$ - равнобедренная трапеция; $BD = b$; $\angle ADB = \alpha$

$\angle DBD_1 = \beta$

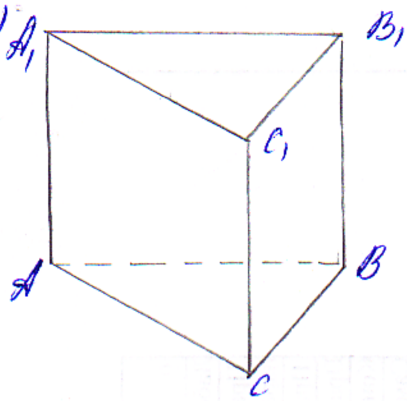
Найти: V

1) Т.к. $ABCD$ - равнобедренная трапеция, то $AC = BD = b$, $\angle ADB = \angle CAD = \alpha$. Поэтому $\triangle AOD$ - равнобедренный: $\angle AOD = 180^\circ - \angle ADB - \angle CAD = 180 - \alpha - \alpha = 180 - 2\alpha$.

2) Найдем площадь трапеции $ABCD$: $S_{осн} = \frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\angle AOD = \frac{1}{2}b\cdot b\sin(180 - 2\alpha) = \frac{1}{2}b^2\sin 2\alpha$

3) $\triangle DBD_1$ - прямоугольный: $\operatorname{tg}\angle DBD_1 = \frac{DD_1}{BD} \Rightarrow DD_1 = BD\operatorname{tg}\angle DBD_1 = b\operatorname{tg}\beta$.

4) Найдем объем: $V = S_{осн}\cdot h = \frac{1}{2}b^2\sin 2\alpha\cdot b\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}b^3\sin 2\alpha\operatorname{tg}\beta$.

15) 

Дано: $ABCA_1B_1C_1$ - правильная треугольная призма

$V_{пр} = V$; $S = S_{min}$

Найти: AB, S

1) Пусть $AB = x$, тогда площадь основания будет: $S_{осн} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$. Т.к. объем призмы равен: $V = S_{осн} \cdot h$, то высота будет равна $AA_1 = h = \frac{V}{S_{осн}} = \frac{V}{\frac{x^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{4V}{x^2\sqrt{3}}$.

2) Найдем полную поверхность призмы: $S = 2S_{осн} + S_{бок}$.

Боковая поверхность равна $S_{бок} = P_{осн} \cdot h = 3AB \cdot AA_1 = 3x \cdot \frac{4V}{x^2\sqrt{3}} = \frac{12V}{x\sqrt{3}} = \frac{4V\sqrt{3}}{x}$

$S = 2 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + \frac{4V\sqrt{3}}{x} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2} + \frac{4V\sqrt{3}}{x} = \frac{x^3\sqrt{3} + 8V\sqrt{3}}{2x}$

3) Найдем экстремумы функции $S(x) = \frac{x^3\sqrt{3} + 8V\sqrt{3}}{2x}$

Вычислим производную $S'(x) = \frac{3x^2\sqrt{3} \cdot 2x - (x^3\sqrt{3} + 8V\sqrt{3}) \cdot 2}{4x^2} =$

$= \frac{6x^3\sqrt{3} - 2x^3\sqrt{3} - 16V\sqrt{3}}{\cancel{2}x^2} = \frac{4x^3\sqrt{3} - 16V\sqrt{3}}{4x^2}$

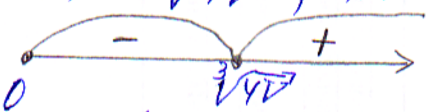
Найдем критические точки: $S'(x) = 0$; $\frac{4x^3\sqrt{3} - 16V\sqrt{3}}{4x^2} = 0$

$4x^3\sqrt{3} - 16V\sqrt{3} = 0 \quad |: 4\sqrt{3}$

$x^3 - 4V = 0$

$x^3 = 4V$

$x = \sqrt[3]{4V}$; $x > 0$.



$x = \sqrt[3]{4V}$ - точка минимума

$AB = \sqrt[3]{4V}$

4) Найдем полную поверхность: $S = 2S_{осн} + S_б$.

Площадь основания: $S_{осн} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt[3]{(4V)^2} \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt[3]{16V^2} \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt[6]{(16V^2)^2}\cancel{\sqrt{\ }}}{4}$

$= \frac{\sqrt[6]{(16V^2)^2} \cdot \sqrt[6]{3^3}}{4} = \frac{\sqrt[6]{256V^4 \cdot 27}}{4} = \frac{\sqrt[6]{64 \cdot 4V^4 \cdot 27}}{4} = \frac{2\sqrt[6]{108V^4}}{4} = \frac{\sqrt[6]{108V^4}}{2}$

Боковая поверхность призмы: $S_б = P_{осн} h$; $h = \frac{4V}{x^2\sqrt{3}} = \frac{V}{S_{осн}} =$

$= \frac{2V}{\sqrt[6]{108V^4}} = 2 \cdot \sqrt[6]{\frac{V^6}{108V^4}} = 2\sqrt[6]{\frac{V^2}{108}}$.

Периметр основания: $P_{осн} = 3AB = 3 \cdot \sqrt[3]{4V}$

$S_{бок} = 3\sqrt[3]{4V} \cdot 2\sqrt[6]{\frac{V^2}{108}} = 6\sqrt[3]{4V} \cdot \sqrt[6]{\frac{V^2}{108}} = 6\sqrt[6]{16V^2} \cdot \sqrt[6]{\frac{V^2}{108}} = 6\sqrt[6]{\frac{4V^4}{27}}$

$S = 2 \cdot \frac{\sqrt[6]{108V^4}}{2} + 6\sqrt[6]{\frac{4V^4}{27}} = \sqrt[6]{108V^4} + 6\sqrt[6]{\frac{4V^4}{27}}$.

(II) Пирамида.

1) Высота правильной треугольной пирамиды 8см, а сторона основания равна 6см. Найти боковое ребро пирамиды и ее апофему.

2) Найти площадь диагонального сечения правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой 8см, а боковое ребро – 10см

3) Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 8см и образует с плоскостью основания угол 30°. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

4) В основании пирамиды лежит ромб с меньшей диагональю 4см и острым углом 60°. Все боковые грани образуют с плоскостью основания углы по 45°. Найти площадь боковой поверхности пирамиды

5) В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция с основаниями 8см и 4см. Все двугранные углы при основании равны 60°. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

6) В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной 5см и основанием 6см. Все боковые ребра образуют с плоскостью основания угол 60°. Найти объем пирамиды.

7) В основании пирамиды лежит прямоугольник со сторонами 6см и 8см. Все боковые ребра одинаково наклонены к плоскости основания. Найти площадь боковой поверхности, если высота пирамиды 4см.

8) В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 6см, а двугранный угол при боковом ребре – 120°. Найти объем пирамиды.

9) Основание пирамиды – прямоугольный треугольник с гипотенузой 4см и острым углом 30°. Боковые грани, содержащие стороны этого угла, перпендикулярны основанию, а третья грань наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найти объем пирамиды.

10) Основание пирамиды – правильный треугольник со стороной 6см. Одна из боковых граней перпендикулярна плоскости основания, а две другие образуют с ним двугранные углы по 45°. Найти объем пирамиды

11) В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетом a и противолежащим углом α. Все двугранные углы при основании пирамиды равны β. Найти полную поверхность пирамиды.

12) В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α, а длина перпендикуляра, опущенного из основания высоты на боковую грань, равна m. Найти объем пирамиды.

13) В основании пирамиды лежит ромб с острым углом α и площадью S. Все боковые грани образуют с плоскостью основания угол β. Найти объем пирамиды.

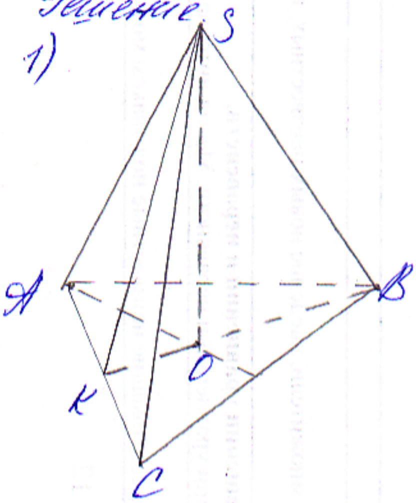
14) В правильной четырехугольной пирамиде апофема равна a, и угол между апофемами двух смежных боковых граней равен α. Найти объем пирамиды.

15) Высота правильной четырехугольной пирамиды равна h, а плоский угол при вершине α. Найти объем пирамиды.

16) Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды наклонено к плоскости основания под углом α. Найти двухгранный угол при боковом ребре пирамиды.

Решение

1)



Дано: $SABC$ – правильная треугольная пирамида; $SO \perp (ABC)$; $SO = 8$ см; $AC = 6$ см

Найти: AS; SK

1) ΔABC – равносторонний; O – центр описанной окружности; $OA = R$ (радиус описанной окружности)

$R = \frac{AC\sqrt{3}}{3} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$.

2) ΔAOS – прямоугольный: $AS^2 = SO^2 + OA^2$ (th Пифагора)

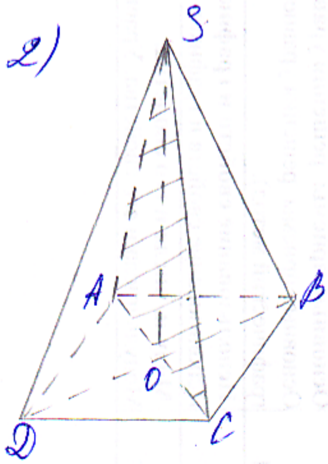
$AS^2 = 8^2 + (2\sqrt{3})^2 = 64 + 12 = 76$; $AS = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$ см.

3) ΔAKS – прямоугольный $AS^2 = AK^2 + SK^2$ (th. Пифагора); $AK = \frac{1}{2}AC = 3$ см.

$SK^2 = AS^2 - AK^2 = (2\sqrt{19})^2 - 3^2 = 76 - 9 = 67$; $SK = \sqrt{67}$ см.

Ответ: $SK = \sqrt{67}$ см; $AS = 2\sqrt{19}$ см.

2)



Дано: $SABCD$ – правильная четырехугольная пирамида; $AB = 8$ см, $AS = 10$ см; ASC – диагональное сечение.

Найти: $S_{сеч}$.

1) ΔACD – прямоугольный, равнобедренный: $\angle CAD = 45°$

$\cos CAD = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AC = \frac{AD}{\cos CAD} = \frac{8}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{16}{\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}$ см.

$OA = \frac{1}{2}AC = 4\sqrt{2}$ см.

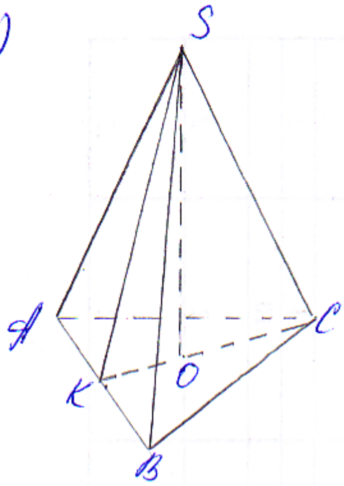
2) ΔASO – прямоугольный: $AS^2 = AO^2 + SO^2$ (th. Пифагора)

$SO^2 = AS^2 - AO^2 = 10^2 - (4\sqrt{2})^2 = 100 - 32 = 68$; $SO = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$ см

3) Найдем площадь сечения: $S_{сеч} = \frac{1}{2}AC \cdot SO = \frac{1}{2} 8\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{17} = 8\sqrt{34}$ см^2

Ответ: $S_{сеч} = 8\sqrt{34}$ см^2.

3)



Дано: SABC - правильная треугольная пирамида, $SC = 8$ см, $\angle SCK = 30°$

Найти: S

1) $\triangle SOC$ - прямоугольный: $\sin \angle SCO = \frac{CO}{SC} \Rightarrow CO = SC \sin \angle SCO = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$ см; $\cos \angle SCO = \frac{SO}{SC} \Rightarrow SO = SC \cos \angle SCO = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ см.

2) $\triangle ABC$ - равносторонний: CO - радиус описанной окружности. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a = AB = \frac{3R}{\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot 4}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$ см.

OK - радиус вписанной окружности: $r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{6} = \frac{4 \cdot 3}{6} = 2$ см.

3) $\triangle SOK$ - прямоугольный: $SK^2 = SO^2 + OK^2$ (th Пифагора)

$SK^2 = (4\sqrt{3})^2 + 2^2 = 48 + 4 = 52$; $SK = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ см.

4) Найдем площадь полной поверхности: $S = S_{осн} + S_{бок}$

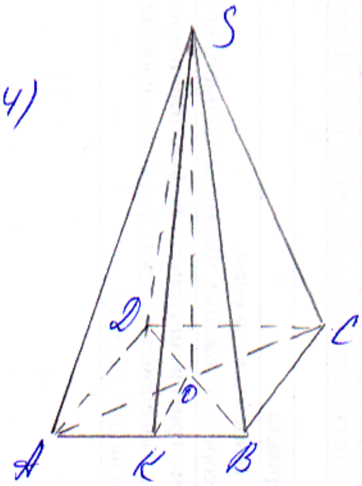
Площадь основания: $S_{осн} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(4\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{48\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}$ см^2

Площадь боковой поверхности: $S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot m = \frac{1}{2} \cdot 3AB \cdot SK = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{13} = 12\sqrt{39}$ см^2

$S = 12\sqrt{3} + 12\sqrt{39} = 12(\sqrt{3} + \sqrt{39})$ см^2.

Ответ: $12(\sqrt{3} + \sqrt{39})$ см^2

4)



Дано: SABCD - пирамида, ABCD - ромб; $BD = 4$ см, $\angle DAB = 60°$, $\angle SKO = 45°$

Найти: $S_{бок}$

1) $\triangle ABD$ - равнобедренный: $\angle ABD = \angle ADB$

$\angle ADB + \angle ABD + \angle DAB = 180°$

$2\angle ADB + \angle DAB = 180$

$\angle ADB = \frac{1}{2}(180 - \angle DAB) = \frac{1}{2}(180 - 60) = 60° \Rightarrow$

$\triangle ABD$ - равносторонний: $AB = DB = 4$ см.

$OB = \frac{1}{2} DB = 2$ см

2) $OK \perp AB \Rightarrow \triangle AOK$ - прямоугольный; $AO = OB \, tg \angle ABO = 2\sqrt{3}$ см;

$\angle KAO = \frac{1}{2} \angle DAB$ (т.к. AO - его биссектриса), $\angle KAO = 30°$

$\sin \angle KAO = \frac{OK}{AO} \Rightarrow OK = AO \sin \angle KAO = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}$ см.

$AB^2 = AO^2 + OB^2$ (th Пифагора); $AB^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2^2 = 12 + 4 = 16$, $AB = \sqrt{16} = 4$.

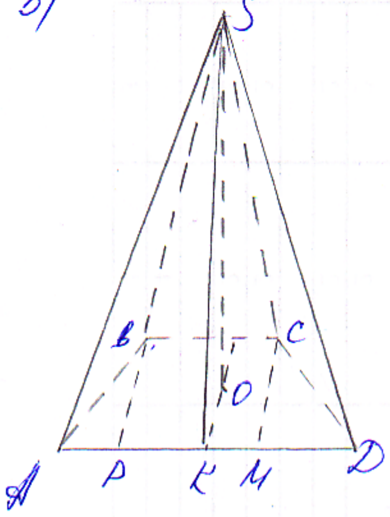
3) $\triangle SKO$ - прямоугольный: $\cos \angle SKO = \frac{OK}{SK}$; $SK = \frac{OK}{\cos \angle SKO} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}$ см.

4) Найдем боковую поверхность: $S_б = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot m$ (т.к. все боковые грани равны); $P_{осн} = 4AB = 4 \cdot 4 = 16$ см

$S_б = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \sqrt{6} = 8\sqrt{6}$ см^2

Ответ: $S_б = 8\sqrt{6}$ см^2

5)



Дано: $SABCD$ - пирамида; $ABCD$ - равнобедренная трапеция, $AD = 8$см, $BC = 4$см, $\angle SKO = 60^\circ$

Найти: S.

1) Т.к. двугранные углы при основании пирамиды равны, то в основание можно вписать окружность, а основание высоты будет её центром. Согласно критерия возможности вписания в четырехугольник окружности:

$BC + AD = AB + CD$; $BC + AD = 2AB$ (т.к. $AB = CD$)

$AB = \frac{BC+AD}{2} = \frac{8+4}{2} = 6$ см.

2) $BP \perp AD$; $CM \perp AD \Rightarrow PBCM$ - прямоугольник, $PM = BC = 4$см

$AP = MD$ (т.к. $\triangle ABP = \triangle CMD$)

$AD = AP + PM + MD = 2AP + PM \Rightarrow AP = \frac{AD-PM}{2} = \frac{8-4}{2} = 2$ см.

3) $\triangle ABP$ - прямоугольный: $AB^2 = BP^2 + AP^2$ (th. Пифагора)

$BP^2 = AB^2 - AP^2 = 6^2 - 2^2 = 36 - 4 = 32$; $BP = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ см.

$S_{осн} = \frac{BC+AD}{2} \cdot BP = \frac{4+8}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$ см^2.

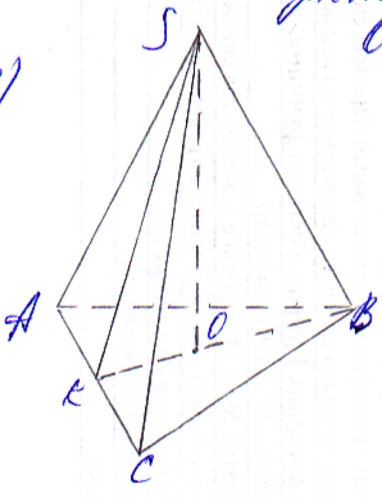
4) Т.к. все двугранные углы при основании равны, то

$S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos\alpha} = \frac{24\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = 48\sqrt{2}$ см^2

Полная поверхность пирамиды: $S = S_{осн} + S_{бок} = 24\sqrt{2} + 48\sqrt{2} = 72\sqrt{2}$ см^2.

Ответ: $S = 72\sqrt{2}$ см^2

6)



Дано: $SABC$ - пирамида, $\triangle ABC$ - равнобедренный $AC = 6$см, $AB = 5$см, $\angle SBO = 60^\circ$

Найти: V

1) Т.к. все ребра одинаково наклонены к основанию, то основание высоты - центр описанной окружности, $OB = R$ - радиус описанной окружности.

$R = \frac{abc}{4S}$

2) $\triangle ABK$ - прямоугольный, $AB^2 = AK^2 + BK^2$ (th Пифагора), $AK = \frac{1}{2}AC = 3$см. $BK^2 = AB^2 - AK^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$; $BK = \sqrt{16} = 4$см.

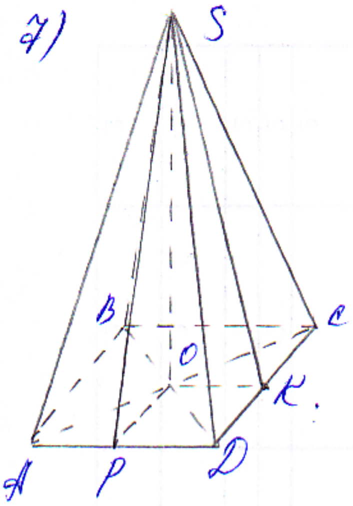
Площадь $\triangle ABC$: $S_{осн} = \frac{1}{2} AC \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$ см^2

3) $\triangle SOB$ - прямоугольный: $tg\angle SBO = \frac{SO}{OB} \Rightarrow SO = OB\, tg\angle SBO$;

$OB = \frac{6 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 12} = 3{,}75$ см; $SO = 3{,}75 \cdot \sqrt{3}$ см.

4) Найдем объем пирамиды: $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 3{,}75\sqrt{3} = 15\sqrt{3}$ см^3

Ответ: $V = 15\sqrt{3}$ см^3

7) 

Дано: SABCD – пирамида, ABCD – прямоугольник. $AB = 6$ см, $AD = 8$ см, $SO \perp (ABC)$, $SO = 4$ см.

Найти: $S_{бок}$

1) Проведем $OP \perp AD$, $OK \perp CD$. Т.к. пирамида неправильная, то формула $S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} h$ неприменима. Но поскольку $AD = BC$, а $AB = CD$, то $S_{ADS} = S_{BCS}$ и $S_{CDS} = S_{ABS}$. Площадь боковой поверхности найдем по формуле: $S_{бок} = 2(S_{ADS} + S_{CDS})$

2) ΔSOK – прямоугольный: $SK^2 = SO^2 + OK^2$ (th. Пифагора); $OK = \frac{1}{2} AD = 4$ см

$SK^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32$, $SK = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ см

3) ΔSOP – прямоугольный: $SP^2 = SO^2 + OP^2$ (th. Пифагора); $OP = \frac{1}{2} CD = 3$ см

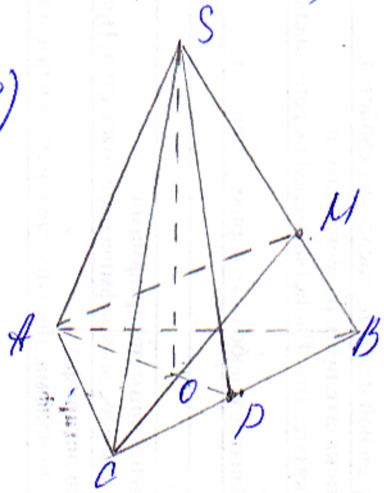
$SP^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$; $SP = \sqrt{25} = 5$ см.

4) Найдем площадь боковой поверхности: $S_{CDS} = \frac{1}{2} SK \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

$S_{ADS} = \frac{1}{2} AD \cdot SP = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 = 20$ см^2.

$S = 2 \cdot (20 + 12\sqrt{2}) = 8(5 + 3\sqrt{2})$ см^2

Ответ: $S = 8(5 + 3\sqrt{2})$ см^2.

8) 

Дано: SABC – правильная треугольная пирамида, $AC = 6$ см, $\angle AMC = 120°$

Найти: V

1) ΔABC – равносторонний; $OP = r$ – радиус вписанной окружности. $r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \cancel{2}\sqrt{3}$ см.

2) ΔAMC – равнобедренный ($AM = CM$)

$AC^2 = AM^2 + CM^2 - 2AM \cdot CM \cos\angle AMC$ (th. косинусов)

$AC^2 = 2CM^2 - 2CM^2 \cos\angle AMC = 2CM^2 - 2CM^2 \cdot \cos 120° = 2CM^2 + 2CM^2 \cos 60° =$
$= 2CM^2 + 2CM^2 \cdot \frac{1}{2} = 3CM^2$

$CM^2 = \frac{AC^2}{3} = \frac{36}{3} = 12$; $CM = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ см.

3) $CM \perp BS \Rightarrow \Delta CMB$ – прямоугольный: $BC^2 = BM^2 + CM^2$ (th. Пифагора)

$BM^2 = BC^2 - CM^2 = 6^2 - (2\sqrt{3})^2 = 36 - 12 = 24$, $BM = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ см.

4) ΔSCM – прямоугольный. Пусть $CS = x$, $SM = x - 2\sqrt{6}$. По th. Пифагора:

$CS^2 = CM^2 + SM^2$

$x^2 = 12 + (x - 2\sqrt{6})^2$

$x^2 = 12 + x^2 - 4x\sqrt{6} + 24$.

$x^2 - 4x\sqrt{6} + 36 - x^2 = 0$

$4x\sqrt{6} = 36$

$x = \frac{36}{4\sqrt{6}} = \frac{9}{\sqrt{6}} = \frac{9\sqrt{6}}{6} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$; $BS = CS = \frac{3\sqrt{6}}{2}$

5) Найдем площадь $\triangle SBC$: $S=\frac{1}{2}SB\cdot CM$; $S=\frac{1}{2}SP\cdot BC$ Получим:

$\frac{1}{2}SB\cdot CM=\frac{1}{2}SP\cdot BC$

$SP=\frac{SB\cdot CM}{BC}=\frac{\frac{3\sqrt6}{2}\cdot 2\sqrt3}{6}=\frac{3\sqrt{18}}{6}=\frac{\sqrt{18}}{2}=\frac{3\sqrt2}{2}$ см.

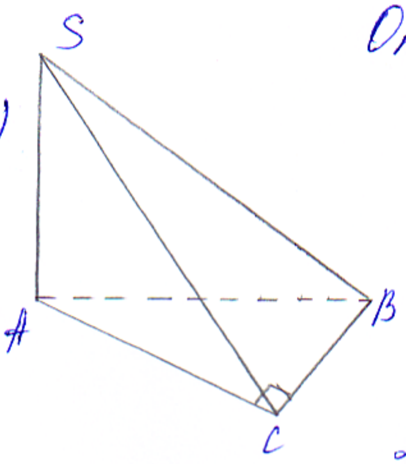
6) $\triangle SOP$ – прямоугольный: $SO^2+OP^2=SP^2$ (th Пифагора)

$SO^2=SP^2-OP^2=\left(\frac{3\sqrt2}{2}\right)^2-(\cancel{2}\sqrt3)^2=\frac{18}{4}-\cancel{4}\cdot3=4,5-3=1,5=\frac{3}{2}$; $SO=\sqrt{\frac{3}{2}}$ см.

7) Найдем объем: $V=\frac{1}{3}S_{осн}h$, площадь основания: $S_{осн}=\frac{a^2\sqrt3}{4}=\frac{36\sqrt3}{4}=$
$=9\sqrt3$ см^2

$V=\frac{1}{3}\cdot9\sqrt3\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}=3\cdot\sqrt{\frac{3\cdot3}{2}}=\frac{9}{\sqrt2}=\frac{9\sqrt2}{2}$ см^3.

Ответ: $V=\frac{9\sqrt2}{2}$ см^3

9) 

Дано: $SABC$ – пирамида, $\triangle ABC$ – прямоугольный
$\angle BAC=30°$, $AB=4$см; $(SAC)\perp(ABC)$; $(SAB)\perp(ABC)$
$\angle ACS=60°$
Найти: V

1) $\triangle ABC$ – прямоугольный: $\cos\angle CAB=\frac{AC}{AB}$

$AC=AB\cos\angle CAB=4\cdot\cos30°=4\cdot\frac{\sqrt3}{2}=2\sqrt3$ см.

2) $AC\perp BC \Rightarrow SC\perp BC$ (по th. о 3^х перпендикулярах)

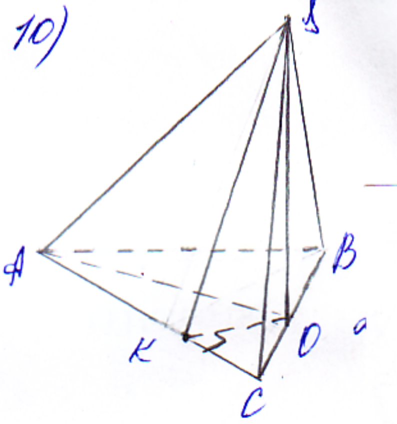
$\triangle ACS$ – прямоугольный: $tg\angle ACS=\frac{AS}{AC}\Rightarrow AS=AC\,tg\angle ACS=2\sqrt3\cdot\sqrt3=6$ см

3) Найдем объем: $V=S_{осн}\cdot h$

Площадь основания: $S_{осн}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC=\frac{1}{2}\cdot4\cdot2\sqrt3\cdot\frac{1}{2}=2\sqrt3$ см^2.

$V=2\sqrt3\cdot6=12\sqrt3$ см^3

Ответ: $V=12\sqrt3$ см^3

10) 

Дано: $SABC$ – пирамида, $\triangle ABC$ – равносторонний
$AC=6$см; $(SBC)\perp(ABC)$, $\angle SKB=45°$
Найти: V

1) $OK\perp AC$, $CO=\frac{1}{2}BC=3$см.

$\triangle CKO$ – прямоугольный: $\sin\angle CKO=\frac{OK}{CO}\Rightarrow$

$OK=CO\sin\angle CKO=3\cdot\frac{\sqrt3}{2}=1,5\sqrt3$ см.

2) $\triangle SKO$ – прямоугольный

$tg\angle SKO=\frac{SO}{OK}\Rightarrow SO=OK\,tg\angle SKO=1,5\sqrt3\cdot1=$
$=1,5\sqrt3$ см

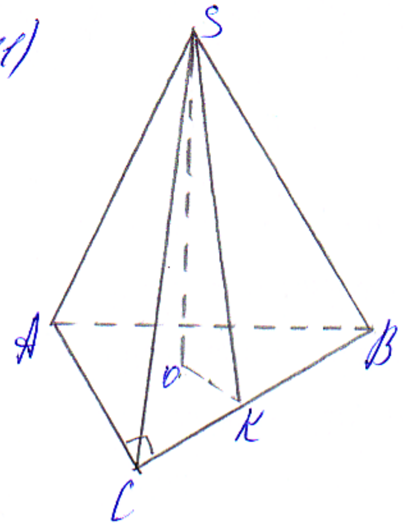
3) Найдем объем: $V=\frac{1}{3}Sh$

Площадь основания: $S=\frac{a^2\sqrt3}{4}=\frac{36\sqrt3}{4}=9\sqrt3$.

$V=\frac{1}{3}\cdot9\sqrt3\cdot1,5\sqrt3=13,5$ см^3

Ответ: $V=13,5$ см^3

11)



Дано: SABC - пирамида, $\triangle ABC$ - прямоугольный, $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle SKO = \beta$.

Найти: S

1) $\triangle ABC$: $\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{BC}{AC} \Rightarrow AC = \frac{BC}{\operatorname{tg}\angle BAC} = BC \operatorname{ctg}\angle BAC = a \operatorname{ctg}\alpha$

$\sin\angle BAC = \frac{BC}{AB} \Rightarrow AB = \frac{BC}{\sin\angle BAC} = \frac{a}{\sin\alpha}$.

Т.к. двугранные углы при основании равны, то основание высоты O - центр вписанной окружности $OK = r$

Для прямоугольного треугольника $r = \frac{AC + BC - AB}{2}$

$r = \frac{a\operatorname{ctg}\alpha + \frac{a}{\sin\alpha} + a}{2} = \frac{a\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{a}{\sin\alpha} + a}{2} = \frac{a\cos\alpha + a + a\sin\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{a(\cos\alpha + \sin\alpha + 1)}{2\sin\alpha}$

2) $\triangle SOK$ - прямоугольный: $\cos\angle SKO = \frac{OK}{SK} \Rightarrow SK = \frac{OK}{\cos\angle SKO} = \frac{a(\cos\alpha + \sin\alpha + 1)}{2\sin\alpha\cos\beta}$

3) Найдем площадь полной поверхности пирамиды: $S = S_{осн} + S_{бок}$

Площадь основания: $S = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} a \cdot a\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{ctg}\alpha$.

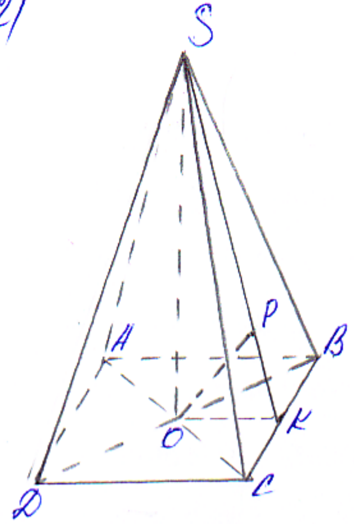
Периметр основания: $P_{осн} = AC + BC + AB = a + a\operatorname{ctg}\alpha + \frac{a}{\sin\alpha} = a + a\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a\sin\alpha + a\cos\alpha + a}{\sin\alpha} = \frac{a(\sin\alpha + \cos\alpha + 1)}{\sin\alpha}$

Площадь боковой поверхности: $S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot SK = \frac{a(\sin\alpha + \cos\alpha + 1)}{2\sin\alpha} \cdot \frac{a(\cos\alpha + \sin\alpha - 1)}{2\sin\alpha\cos\beta} = \frac{a^2(\sin\alpha + \cos\alpha + 1)(\sin\alpha + \cos\alpha - 1)}{4\sin^2\alpha\cos\beta} = \frac{a^2((\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1^2)}{4\sin^2\alpha\cos\beta} = \frac{a^2(\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - 1)}{4\sin^2\alpha\cos\beta} = \frac{a^2(1 + 2\sin\alpha\cos\alpha - 1)}{4\sin^2\alpha\cos\beta} = \frac{2a^2\sin\alpha\cos\alpha}{4\sin^2\alpha\cos\beta} = \frac{a^2\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\beta}$

$S = S_{осн} + S_{бок} = \frac{1}{2}a^2\operatorname{ctg}\alpha + \frac{a^2\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\beta} = \frac{a^2\cos\alpha}{2\sin\alpha} + \frac{a^2\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\beta} = \frac{a^2\cos\alpha\cos\beta + a^2\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\beta} = \frac{a^2\cos\alpha(\cos\beta + 1)}{2\sin\alpha\cos\beta} = \frac{a^2\operatorname{ctg}\alpha(\cos\beta + 1)}{2\cos\beta}$

Ответ: $S = \frac{a^2\cos\alpha(\cos\beta + 1)}{2\sin\alpha\cos\beta} = \frac{a^2\operatorname{ctg}\alpha(\cos\beta + 1)}{2\cos\beta}$

12)



Дано: SABCD - правильная четырехугольная пирамида, $\angle SKO = \alpha$, $OP \perp (BCS)$, $OP = m$

Найти: V

1) $\triangle POK$ - прямоугольный: $\sin\angle PKO = \frac{OP}{OK} \Rightarrow$

$OK = \frac{OP}{\sin\angle PKO} = \frac{m}{\sin\alpha}$; $CD = 2OK = \frac{2m}{\sin\alpha}$

2) $\triangle SOK$ - прямоугольный: $\angle KSO = 90 - \angle SKO = 90 - \alpha$

$ctg\angle KSO = \frac{SO}{OK} \Rightarrow SO = OK\,ctg\angle KSO = \frac{m}{\sin\alpha} \cdot ctg(90-\alpha) = \frac{m\,tg\alpha}{\sin\alpha} = \frac{m\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{m}{\cos\alpha}$

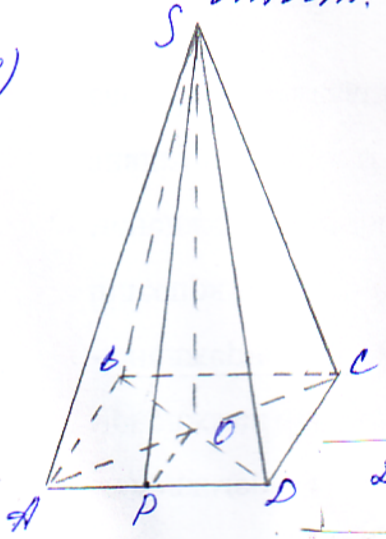
3) Найдем объем: $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$

Площадь основания: $S_{осн} = CD^2 = \left(\frac{2m}{\sin\alpha}\right)^2 = \frac{4m^2}{\sin^2\alpha}$

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{4m^2}{\sin^2\alpha} \cdot \frac{m}{\cos\alpha} = \frac{4m^3}{3\sin^2\alpha\cos\alpha}$

Ответ: $V = \frac{4m^3}{3\sin^2\alpha\cos\alpha}$

13)



Дано: SABCD - пирамида, ABCD - ромб, $S_{ABCD} = S$, $\angle BAD = \alpha$, $\angle SPO = \beta$

Найти: V

1) Площадь ромба находится по формуле:

$S = AB^2 \sin\angle BAD = AB^2 \sin\alpha$

$AB^2 = \frac{S}{\sin\alpha}$; $AB = \sqrt{\frac{S}{\sin\alpha}}$

2) $\triangle AOD = \triangle COD = \triangle BOC = \triangle AOB \Rightarrow$

$S_{AOD} = \frac{1}{4} S$

$S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2} AD \cdot OP$

$\frac{1}{4} S = \frac{1}{2} OP \cdot \sqrt{\frac{S}{\sin\alpha}} \Rightarrow OP = \frac{S}{2\sqrt{\frac{S}{\sin\alpha}}} = \frac{S\sqrt{\sin\alpha}}{2\sqrt{S}} = \frac{\sqrt{S\sin\alpha}}{2}$

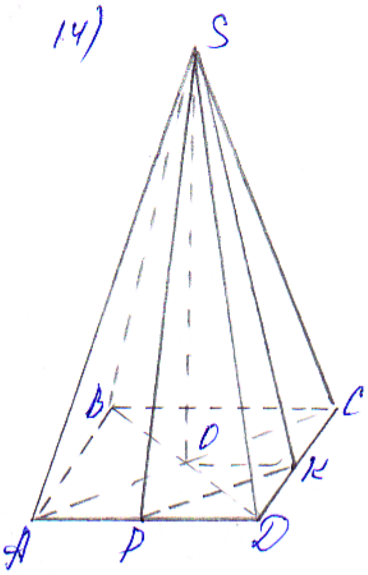
3) $\triangle SPO$ - прямоугольный:

$tg\angle SPO = \frac{SO}{OP} \Rightarrow SO = OP\,tg\angle SPO = \frac{tg\beta\sqrt{S\sin\alpha}}{2}$

4) Найдем объем: $V = \frac{1}{3} S_{осн} h = \frac{1}{3} S \cdot \frac{tg\beta\sqrt{S\sin\alpha}}{2} = \frac{S\,tg\beta\sqrt{S\sin\alpha}}{6}$

Ответ: $V = \frac{S\,tg\beta\sqrt{S\sin\alpha}}{6}$.

14)



Дано: SABCD - правильная четырехугольная пирамида; $SP\perp AD$; $SK\perp CD$; $\angle KSP=\alpha$, $SP=a$

Найти: V

1) ΔPKS - равнобедренный: $SP=SK=a$

По th косинусов: $PK^2=SP^2+SK^2-2SP\cdot SK\cos\angle KSP$

$PK^2=2SP^2-2SP^2\cos\angle KSP$

$PK^2=2a^2-2a^2\cos\alpha=2a^2(1-\cos\alpha)$

$PK=\sqrt{2a^2(1-\cos\alpha)}=a\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$

2) ΔSAD - равнобедренный: SP - медиана и высота $\Rightarrow$ $\Rightarrow AP=DP$

ΔSCD - равнобедренный: SK - медиана и высота $\Rightarrow$ $\Rightarrow DK=CK$

3) ΔACD - равнобедренный, прямоугольный: KP - средняя линия

$KP=\frac{1}{2}AC\Rightarrow AC=2KP=2a\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$

$\angle CAD=45^\circ$; $\cos\angle CAD=\frac{AD}{AC}\Rightarrow AD=AC\cos\angle CAD=2a\sqrt{2(1-\cos\alpha)}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=$ $=a\sqrt{4(1-\cos\alpha)}=2a\sqrt{1-\cos\alpha}$

4) ΔSOK - прямоугольный: $OK=\frac{1}{2}AD=a\sqrt{1-\cos\alpha}$

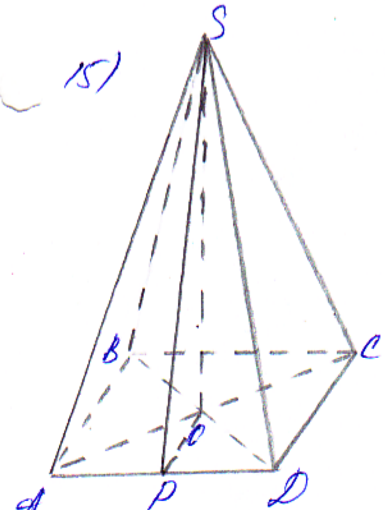
По th Пифагора: $SK^2=OK^2+SO^2\Rightarrow SO^2=SK^2-OK^2=a^2-(a\sqrt{1-\cos\alpha})^2=$ $=a^2-a^2+a^2\cos\alpha=a^2\cos\alpha$; $SO=\sqrt{a^2\cos\alpha}=a\sqrt{\cos\alpha}$

5) Найдем объем: $V=\frac{1}{3}S_{осн}h$. Площадь основания: $S=AD^2=$ $=(2a\sqrt{1-\cos\alpha})^2=4a^2(1-\cos\alpha)$

$V=\frac{1}{3}\cdot 4a^2(1-\cos\alpha)a\sqrt{\cos\alpha}=\frac{4}{3}a^3(1-\cos\alpha)\sqrt{\cos\alpha}$

Ответ: $V=\frac{4}{3}a^3(1-\cos\alpha)\sqrt{\cos\alpha}$

15)



Дано: SABCD - правильная четырехугольная пирамида; $\angle ASD=\alpha$; $SO\perp(ABC)$; $SO=h$.

Найти: V.

1) Пусть сторона основания $AD=x$. Проведем $SP\perp AD$.

ΔASD - равнобедренный: SP - высота, медиана, биссектриса. $AP=\frac{x}{2}$; $\angle ASP=\frac{\alpha}{2}$

$ctg\angle ASP=\frac{SP}{AP}\Rightarrow SP=AP\,ctg\angle ASP=\frac{x}{2}ctg\frac{\alpha}{2}$

2) ΔSPO - прямоугольный: $SP^2=OP^2+SO^2$; $OP=\frac{x}{2}$; Получим:

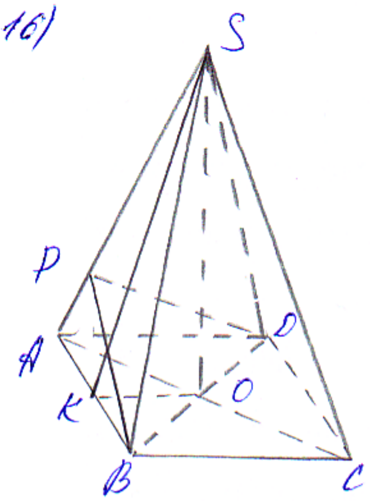
$\frac{x^2}{4}ctg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{x^2}{4}+h^2$; $x^2ctg^2\frac{\alpha}{2}=x^2+4h^2$; $x^2ctg^2\frac{\alpha}{2}-x^2=4h^2$

$x^2(ctg^2\frac{\alpha}{2}-1)=4h^2$; $x^2=\frac{4h^2}{ctg^2\frac{\alpha}{2}-1}$

Т.к. площадь основания: $S_{осн}=AD^2=x^2=\frac{4h^2}{ctg^2\frac{\alpha}{2}-1}$

3) Найдем объем пирамиды: $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h = \frac{4h^3}{ctg^2\frac{\alpha}{2} - 1}$

16)



Дано: SABCD – пирамида; ABCD – квадрат

$\angle SBO = \alpha$

Найти: $\angle BPD$

1) Т.к. линейные размеры не даны, то введем обозначение: $x = AB$ (сторона основания)

$\triangle ABD$ – прямоугольный, равнобедренный.

$\angle ABD = 45^\circ$

$\sin\angle ABD = \frac{AD}{BD} \Rightarrow BD = \frac{AD}{\sin\angle ABD} = \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2x}{\sqrt{2}} = x\sqrt{2}.$

$OB = \frac{1}{2}BD = \frac{x\sqrt{2}}{2}$

2) $\triangle SBO$ – прямоугольный: $tg\angle SBO = \frac{SO}{OB} \Rightarrow SO = OB\, tg\angle SBO = \frac{x\sqrt{2}}{2} tg\alpha$

~~3)~~ $\cos\angle SBO = \frac{OB}{BS} \Rightarrow BS = \frac{OB}{\cos\angle SBO} = \frac{\frac{x\sqrt{2}}{2}}{\cos\alpha} = \frac{x\sqrt{2}}{2\cos\alpha}$

3) $\triangle SOK$ – прямоугольный: $SK^2 = SO^2 + OK^2$ (th Пифагора); $OK = \frac{1}{2}BC = \frac{x}{2}$

$SK^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{x^2 \cdot 2}{4} tg^2\alpha = \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{2} tg^2\alpha = \frac{x^2 + 2x^2 tg^2\alpha}{4} = \frac{x^2(1 + 2tg^2\alpha)}{4}$

$SK = \sqrt{\frac{x^2(1+2tg^2\alpha)}{4}} = \frac{x}{2}\sqrt{1+2tg^2\alpha}$

4) $\triangle ASB$ – равнобедренный: Площадь треугольника: $S = \frac{1}{2} AS \cdot BP$;

$S = \frac{1}{2} AB \cdot SK$. Получим

$\frac{1}{2} AS \cdot BP = \frac{1}{2} AB \cdot SK \Rightarrow BP = \frac{AB \cdot SK}{AS} = \frac{x \cdot \frac{x}{2}\sqrt{1+2tg^2\alpha}}{\frac{x\sqrt{2}}{2\cos\alpha}} = \frac{x\cos\alpha\sqrt{1+2tg^2\alpha}}{\sqrt{2}}$

$= \frac{x\cos\alpha\sqrt{2+4tg^2\alpha}}{2}$

5) $\triangle BPD$ – равнобедренный ($BP = DP$). По th. косинусов получим:

$BD^2 = BP^2 + DP^2 + 2BP \cdot DP \cos\angle BPD$

$BD^2 = 2BP^2 + 2BP^2 \cos\angle BPD$; $BD^2 = 2BP^2(1 + \cos\angle BPD)$

$2x^2 = \frac{x^2\cos^2\alpha(2+4tg^2\alpha)}{4}(1+\cos\angle BPD)$

$8 = \cos^2\alpha(2+4tg^2\alpha)(1+\cos\angle BPD)$

$4 = \cos^2\alpha(1+2tg^2\alpha)(1+\cos\angle BPD)$

$1 + \cos\angle BPD = \frac{4}{\cos^2\alpha(1+2tg^2\alpha)}$

$\cos\angle BPD = \frac{4}{\cos^2\alpha(1+2tg^2\alpha)} - 1$

$\cos\angle BPD = \frac{4 - \cos^2\alpha(1+2tg^2\alpha)}{\cos^2\alpha(1+2tg^2\alpha)}$; $\angle BPD = \arccos\frac{4 - \cos^2\alpha(1+2tg^2\alpha)}{\cos^2\alpha(1+2tg^2\alpha)}$

Задачи для самостоятельного решения.

(I) Призма

1) В основании призмы лежит ромб. Высота призмы равна 4см, а диагонали – 8см и 12см. Найти площадь боковой поверхности призмы.

2) В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, гипотенуза которого 10см, а один из катетов – 8см. Диагональ боковой грани, содержащей гипотенузу, равна $\sqrt{189}$ см. Найти площадь полной поверхности призмы.

3) В основании прямой призмы лежит параллелограмм со сторонами 6см и 8см и острым углом 60°. Большая диагональ призмы образует с основанием угол 45°. Найти площадь боковой поверхности призмы.

4) В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат. Диагональ боковой грани равна 6 см, а диагональ призмы – 9см. Найти объем параллелепипеда.

5) Основание прямой призмы – равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом 6см. Объем призмы равен 108 см^3. Найти площадь боковой поверхности призмы.

6) В основании прямого параллелепипеда лежит ромб площадью 120 см^2. Найти длину высоты параллелепипеда, если площади его диагональных сечений равны 40см^2 и 96см^2.

7) В основании призмы лежит треугольник со сторонами 8см, 8см и 15см. Диагональ боковой грани, содержащей меньшую сторону, равна 6 см. Найти объем призмы.

8) Основанием призмы является равнобедренная трапеция с боковой стороной 5см, и диаметром вписанной окружности 3см. Диагональ призмы образует с плоскостью основания угол 30°. Найти объем призмы.

9) Диагонали A_1C и B_1D прямоугольного параллелепипеда равны по 8см и пересекаются в точке O так, что $\angle COD = 60°$. Найти объем параллелепипеда, если его диагональ образует с основанием угол 45°

10) Угол между диагоналями основания прямоугольного параллелепипеда равен 30°. Диагональ параллелепипеда равна 12см и образует с плоскостью основания угол 60°. Найти объем.

11) Периметры трех граней прямоугольного параллелепипеда составляют 18см, 20см и 22см. Найти объем параллелепипеда.

12) Площади смежных двух граней прямого параллелепипеда равны 63см^2 и 108см^2, а длина их общего ребра – 9см. Найти площадь наименьшего из диагональных сечений, если острый угол при основании равен 45°.

13) Расстояния от точки пересечения диагоналей прямоугольного параллелепипеда до его ребер равны 5 см, 8 см и 9 см. Найти объем параллелепипеда.

14) Через сторону нижнего основания и противолежащую вершину верхнего основания правильной треугольной призмы проведено сечение площадью $8\sqrt{3}$ см. С плоскостью основания оно образует угол 60°. Найти боковую поверхность призмы.

15) Боковое ребро правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно $\sqrt{161}$, а диагональ призмы – 17 см. Найти площадь сечения AB_1C_1D.

16) В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник с углом β при основании. Диагональ грани, содержащей боковую сторону, равна d и образует угол α с плоскостью основания. Найти объем призмы.

17) Диагональ правильной четырехугольной призмы равна d и образует угол β с плоскостью боковой грани. Найти объем призмы.

18) Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен b, а противоположный ему угол – β. Диагональ грани, содержащий второй катет, образует с гранью, содержащей гипотенузу, угол α. Найти объем призмы.

19) Основанием прямоу призмы является равнобедренный треугольник с углом β при вершине. Через основание этого треугольника и противоположную вершину призмы проведено сечение, периметр которого равен $2p$, а угол при его вершине равен α. Найти площадь боковой поверхности призмы, если ее высота равна боковой стороне основания.

20) Основанием прямой призмы является равнобедренный треугольник с углом β при вершине и радиусом описанной окружности R. Диагональ боковой грани, содержащей основание треугольника, образует с высотой угол α. Найти объем призмы.

21) Диагонали основания прямого параллелепипеда, являющегося параллелограммом, пересекаются под углом φ. Высота параллелепипеда равна h, а диагонали образуют с основанием углы α и β. Найти объем параллелепипеда.

22) Требуется изготовить бак с крышкой, имеющий вид прямоугольного параллелепипеда, объемом 72 м³, притом такой, чтобы стороны основания относились бы как 1:2. Каковы должны быть размеры бака, чтобы полная поверхность была наименьшей?

II Пирамида

1) Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 10см, а боковое ребро - 8см. Найти площадь основания пирамиды.

2) Площадь диагонального сечения правильной четырехугольной пирамиды равна 48см², а сторона основания - $8\sqrt{2}$см. Найти длину бокового ребра пирамиды.

3) Высота правильной треугольной пирамиды равна 10см, а высота основания - 6см. Найти площадь полной поверхности.

4) Найти объем правильной треугольной пирамиды, если ее боковое ребро равно 9см, а апофема - $4\sqrt{2}$ см.

5) Диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды равна $6\sqrt{2}$, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол 60°. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

6) Каждое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 8см. Найти объем пирамиды.

7) В правильной треугольной пирамиде апофема равна половине стороны основания. Найти объем пирамиды, если длина бокового ребра равна $2\sqrt{2}$ см.

8) В основании пирамиды лежит прямоугольник со сторонами 12см и 30см. Найти площадь боковой поверхности, если все ребра одинаково наклонены к плоскости основания, а высота пирамиды равна 8см.

9) В основании пирамиды лежит ромб с диагоналями 6см и 8см. Все двугранные углы при основании равны по 60°. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

10) Основание пирамиды - прямоугольный треугольник с катетами 15см и 8см. Все двугранные углы при основании пирамиды равны по 30°. Найти объем пирамиды.

11) В основании пирамиды лежит прямоугольная трапеция, большее основание которой равно 18см, а меньшая из боковых сторон - 10см. Острый угол трапеции равен 30°. Найти площадь полной поверхности пирамиды, если двугранные углы при основании равны по 45°

12) В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной, равной 8см, и углом при вершине 120°. Все боковые ребра пирамиды образуют с основанием углы по 45°. Найти объем пирамиды.

13) Боковые ребра правильной четырехугольной пирамиды равны 10см и образуют с плоскостью основания углы по 60°. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

14) В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 4 см, а двугранный угол при боковом ребре – 120°. Найти объем пирамиды.

15) В основании пирамиды – прямоугольный треугольник с острым углом 30° и гипотенузой 2 см. Боковые грани, содержащие стороны данного угла, перпендикулярны основанию, а боковая грань, содержащая второй катет, образует с основанием угол 30°. Найти объем пирамиды.

16) В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник с радиусом описанной окружности 3 см. Две боковые грани, перпендикулярны основанию, а третья образует с основанием угол 30°. Найти объем пирамиды.

17) В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной 10 см и углом при вершине 150°. Боковая грань пирамиды, содержащая основание данного треугольника, перпендикулярна основанию, а боковое ребро, выходящее из вершины треугольника, образует с плоскостью основания угол 30°. Найти объем пирамиды.

18) В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с углом α при вершине и боковой стороной в. Найти площадь полной поверхности пирамиды, если двугранные углы при основании равны β.

19) В правильной треугольной пирамиде высота образует с боковым ребром угол β, а основание высоты удалено от бокового ребра на расстояние т. Найти объем пирамиды.

20) В основании пирамиды лежит прямоугольник, площадь которого равна S, а угол между диагоналями α. Все боковые ребра образуют с основанием угол α. Найти объем пирамиды.

21) Апофема правильной треугольной пирамиды равна в. Боковое ребро пирамиды образует с основанием угол α. Найти объем пирамиды.

22) В основании пирамиды лежит треугольник, два угла которого равны α и β, а радиус описанной окружности R. Найти объем пирамиды, если боковые ребра образуют с основанием угол φ.

23) В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно l, а двугранный угол при основании α. Найти объем пирамиды.

24) Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен α, а высота – h. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

25) Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен α. Найти величину двугранного угла при основании пирамиды.

26) Двугранный угол при основании правильной четырехугольной пирамиды равен α. Найти угол наклона бокового ребра к плоскости основания.