Прямые и плоскости в пространстве.

Примеры решения задач:

① Перпендикулярность прямой и плоскости

а) В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) катеты AC = 9см и BC = 12 см. К плоскости треугольника проведен перпендикуляр CD равный 18см. Вершина этого перпендикуляра D соединена с серединой гипотенузы. Найти длину этого отрезка.

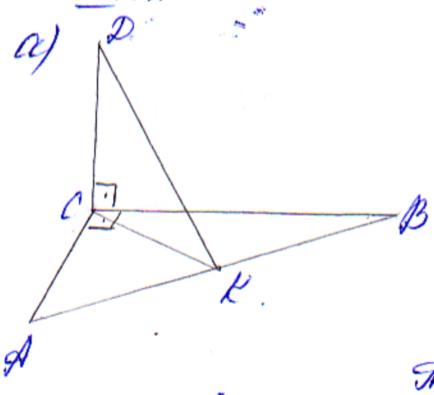
б) Из точки A к плоскости α проведены наклонны AB и AC, длины которых соответственно равны 15см и 20см, а проекции относятся как 9:16. Найти длину перпендикуляра

в) В ромбе ABCD AB = BD = 8см. Прямая AE перпендикулярна плоскости ромба, а точка E удалена от плоскости ромба на 2см. Найти длину наклонной CE.

г) Из точки T к плоскости α проведены наклонны AT и BT и перпендикуляр TO. Расстояние между основаниями наклонных $AB = 3\sqrt{19}$, а проекции их образуют угол 60°. Найти наклонную BT, если длина наклонной AT = 17см, а ее проекции OA = 15см.

Решение

а)



Дано: $\triangle ABC$ - прямоугольный; AC = 9см; BC = 12 см; $CD \perp (ABC)$; CD = 18см, AK = BK

Найти: DK.

1) $\triangle ABC$: $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (th Пифагора)

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$ см.

2) Т.к. AK = BK, то CK - медиана $\triangle ABC$; $CK = \frac{1}{2} AB$ (свойство медианы, проведенной к гипотенузе) CK = 7,5 см.

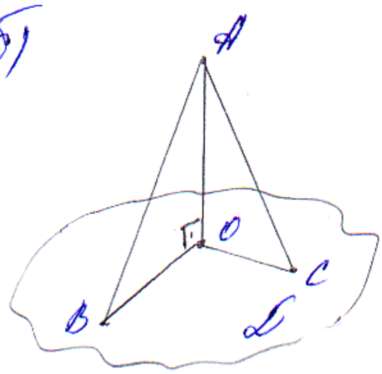
3) $CD \perp (ABC) \Rightarrow CD \perp CK \Rightarrow \triangle CDK$ - прямоугольный

$DK^2 = CK^2 + CD^2$ (th. Пифагора); $DK^2 = 7{,}5^2 + 18^2 = 380{,}25$

$DK = \sqrt{380{,}25} = 19{,}5$ см.

Ответ: DK = 19,5 см.

б)



Дано: α - плоскость; $AO \perp \alpha$; AB, AC - наклонные; AB=15см; AC=20см; BO:CO=9:16.

Найти: AO.

1) $AO \perp \alpha \Rightarrow AO \perp BO \Rightarrow \triangle AOB$ - прямоугольный

$AB^2=AO^2+OB^2$ (th. Пифагора)

Пусть x - коэффициент пропорциональности. Тогда BO=9x, CO=16x. Получим:

$15^2=AO^2+(9x)^2$; $225=AO^2+81x^2 \Rightarrow AO^2=225-81x^2$

2) $AO \perp \alpha \Rightarrow AO \perp CO \Rightarrow \triangle AOC$ - прямоугольный: $AC^2=CO^2+AO^2$ (th. Пифагора). Получим:

$20^2=(16x)^2+AO^2$; $400=256x^2+AO^2 \Rightarrow AO^2=400-256x^2$

Получим уравнение

$225-81x^2=400-256x^2$

$256x^2-81x^2=400-225$

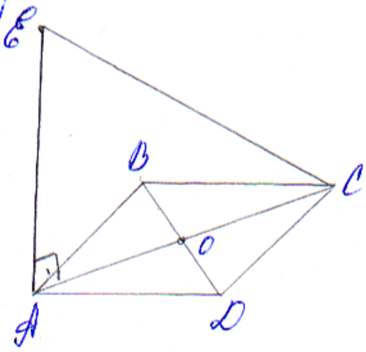
$175x^2=175$

$x^2=1$; $x=1$.

Значит: $AO^2=400-256\cdot1^2=144$; AO=12см.

Ответ: AO=12 см.

в)



Дано: ABCD - ромб, AB=BD=6 см. $AE \perp (ABCD)$

AE=2 см.

Найти: CE.

1) $\triangle ABD$: AB=BD; AB=AD $\Rightarrow \triangle ABD$ - равносторонний. AO - высота, медиана; $\angle ADB=60°$

$\sin\angle ADB=\frac{AO}{AD} \Rightarrow AO=AD\sin\angle ADB=6\cdot\sin60=\frac{6\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$ см.

$AC=2AO=6\sqrt{3}$ см.

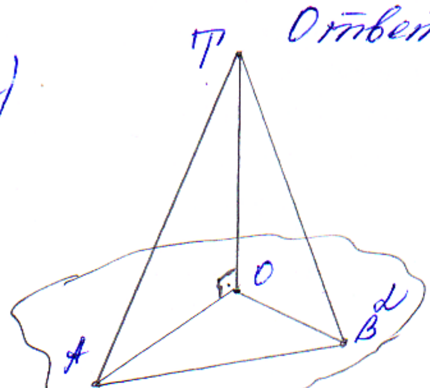
2) $AE \perp (ABCD) \Rightarrow AE \perp AC \Rightarrow \triangle CAE$ - прямоугольный;

$CE^2=AC^2+AE^2$ (th. Пифагора); $CE^2=(6\sqrt{3})^2+2^2=108+4=112$;

$CE=\sqrt{112}=\sqrt{16\cdot7}=4\sqrt{7}$ см.

Ответ: $CE=4\sqrt{7}$ см.

г)



Дано: α - плоскость; $TO \perp \alpha$; AT, BT - наклонные; $AB=3\sqrt{19}$ см; AT=17 см; AO=15см. $\angle AOB=60°$

Найти: BT

1) $TO \perp \alpha \Rightarrow TO \perp AO \Rightarrow \triangle ATO$ – прямоугольный; $AT^2 = AO^2 + TO^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow TO^2 = AT^2 - AO^2 = 17^2 - 15^2 = 289 - 225 = 64$; $TO = \sqrt{64} = 8$ см.

2) $\triangle AOB$: $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cos\angle AOB$ (th. косинусов); $BO = x$.

$(3\sqrt{19})^2 = 15^2 + x^2 - 2 \cdot 15x \cdot \frac{1}{2}$

$171 = 225 + x^2 - 15x$

$x^2 - 15x + 225 - 171 = 0$

$x^2 - 15x + 54 = 0$

$x_1 = 6 \quad x_2 = 9.$

Возможны 2 случая: $BO = 6$ см; $BO = 9$ см.

3) $TO \perp \alpha \Rightarrow TO \perp BO \Rightarrow \triangle BTO$ – прямоугольный; $BT^2 = BO^2 + TO^2$

$BO = 6$ см: $BT^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$; $BT = 10$ см.

$BO = 9$ см: $BT^2 = 9^2 + 8^2 = 81 + 64 = 145$; $BT = \sqrt{145}$ см.

Ответ: $BT = 10$ см или $BT = \sqrt{145}$ см.

(2) Теорема о трех перпендикулярах. Перпендикулярность плоскостей.

а) Из вершины прямого угла C треугольника ABC к его плоскости проведен перпендикуляр CM длиной $4\sqrt{7}$ см. Найти расстояние от точки M до гипотенузы, если катет BC равен $6\sqrt{3}$ см, а угол B составляет 60°.

б) Из вершины прямого угла C треугольника ABC к его плоскости проведен перпендикуляр CK. Расстояние от точки K до гипотенузы равно 13 см. Найти расстояние от точки K до плоскости треугольника, если его катеты равны 15 см и 20 см.

в) В равнобедренном треугольнике ABC боковая сторона равна 17 см, а высота 15 см. Точка P равноудалена от сторон $\triangle ABC$ на 8 см. Найти расстояние от точки P до плоскости треугольника.

г) Точка M равноудалена от каждой вершины равнобедренного треугольника ABC, боковые стороны которого равны по 6 см, а угол при вершине 120°, на 10 см. Найти расстояние от точки M до плоскости треугольника.

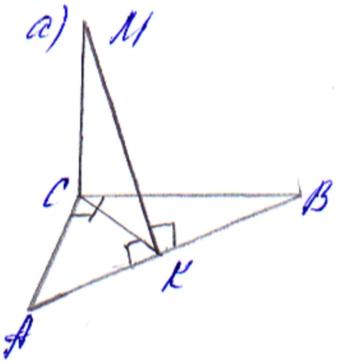
д) Из вершины D прямоугольника ABCD к его плоскости проведен перпендикуляр DE. Точка E удалена от стороны AB на 4 см, а от стороны BC – на 9 см. Найти длину перпендикуляра, если диагональ прямоугольника 7 см.

г) Основания равнобедренной трапеции равны 8 см и 18 см. Точка К равноудалена от всех сторон трапеции на 10см. Найти расстояние от точки К до плоскости трапеции.

ж(е) Концы отрезка лежат в двух перпендикулярных плоскостях. Проекции отрезка на эти плоскости равны 20см и 16см. Расстояние между основаниями перпендикуляров, проведенных из концов отрезка к линии пересечения плоскостей, равно 12см. Найти длину отрезка.

д) Прямоугольник ABCD перегнули по диагонали AC так, плоскости ABC и ACD оказались перпендикулярными. Стороны прямоугольника равны 6см и 8см. Найти расстояние между точками B и D.

Решение.

а) 

Дано: $\triangle ABC$ - прямоугольный, $BC = 6\sqrt{3}$ см; $\angle B = 60°$; $CM \perp (ABC)$; $CM = 4\sqrt{7}$ см.

Найти: MK.

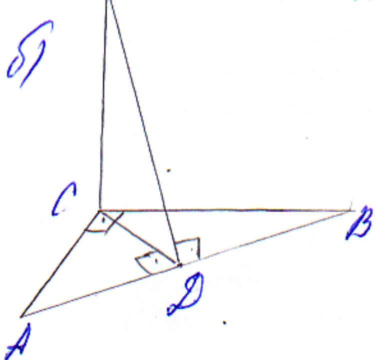
1) $CM \perp (ABC) \Rightarrow CM \perp CK$
$MK \perp AB \Rightarrow CK \perp AB$
$\triangle BCK$ - прямоугольный (по th о 3х перпендикулярах)

2) $\triangle BCK$: $\sin \angle B = \frac{CK}{BC} \Rightarrow CK = BC \sin \angle B = 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9$ см.

3) $\triangle CMK$ - прямоугольный: $MK^2 = MC^2 + CK^2$ (th Пифагора)

$MK^2 = (4\sqrt{7})^2 + 9^2 = 112 + 81 = 193$; $MK = \sqrt{193}$ см.

Ответ: $MK = \sqrt{193}$ см.

б) 

Дано: $\triangle ABC$ - прямоугольный, $AC = 15$см, $BC = 20$см.
$CK \perp (ABC)$, $KD \perp AB$; $KD = 13$см.

Найти: CK.

1) $CK \perp (ABC) \Rightarrow CK \perp CD$
$KD \perp AB \Rightarrow CD \perp AB$ } $CK \perp AB$ (по th. о 3х перпендикулярах)

2) $\triangle ABC$ - прямоугольный; $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (th. Пифагора)

$AB^2 = 15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625$; $AB = \sqrt{625} = 25$см.

3) Найдем площадь $\triangle ABC$. $CD \perp AB$ - высота $\triangle ABC$

$S = \frac{1}{2} CD \cdot AB$; $S = \frac{1}{2} AC \cdot BC$ (т.к. $\triangle ABC$ - прямоугольный)

$\frac{1}{2} CD \cdot AB = \frac{1}{2} AC \cdot BC \mid \cdot 2$

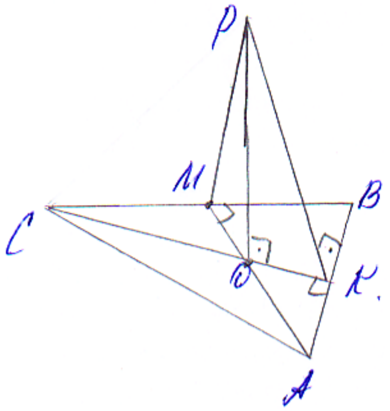
$CD \cdot AB = AC \cdot BC \Rightarrow CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12$ см.

4) $\triangle CDK$ - прямоугольный: $KD^2 = CK^2 + CD^2$ (th. Пифагора)

$CK^2 = KD^2 - CD^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$; $CK = \sqrt{25} = 5$ см.

Ответ: $CK = 5$ см.

в)



Дано: $\triangle ABC$ - равнобедренный; $AC = 17$ см

$CK \perp AB$; $CK = 15$ см., $PK = PM = 8$ см.

$OP \perp (ABC)$

Найти: OP.

1) $\triangle ACK$ - прямоугольный ($CK \perp AB$)

$AC^2 = AK^2 + CK^2$ (th. Пифагора)

$AK^2 = AC^2 - CK^2 = 17^2 - 15^2 = 289 - 225 = 64$

$AK = \sqrt{64} = 8$ см.; $AB = 2AK = 16$ см (т.к. CK - высота и медиана)

2) Т.к. точка P - равноудалена от сторон $\triangle ABC$, то проекция точки P на плоскость (ABC) - центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности Q (точка O). $OM = OK$ - радиус вписанной окружности.

$r = \frac{2S}{P}$, где S - площадь $\triangle ABC$, P - его периметр.

$S = \frac{1}{2} CK \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 16 = 120$ см^2; $P = 2AC + AB = 2 \cdot 17 + 16 = 50$ см.

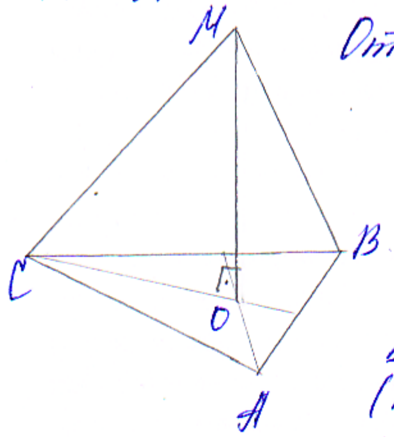
$r = \frac{2 \cdot 120}{50} = 4{,}8$ см.

3) $\triangle POK$ - прямоугольный; $PK^2 = PO^2 + OK^2$ (th. Пифагора)

$PO^2 = PK^2 - OK^2 = 8^2 - 4{,}8^2 = 64 - 23{,}04 = 40{,}96$; $OP = \sqrt{40{,}96} = 6{,}4$ см.

Ответ: $OP = 6{,}4$ см.

г)



Дано: $\triangle ABC$ - равнобедренный, $AC = 6$ см,

$\angle C = 120°$; $CM = BM = 10$ см.

Найти: OM

1) Т.к. точка M равноудалена от вершин $\triangle ABC$, то проекцией точки M на плоскость (ABC) будет центр описанной около $\triangle ABC$ окружности (точка O); $OA = OC$ - радиус описанной окружн.

2) $OC = R$; $R = \frac{abc}{4S}$, где S - площадь $\triangle ABC$

$S = \frac{1}{2} AC \cdot BC \sin \angle C = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin 120° = 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$ см^2.

3) ΔABC: $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos\angle C$ (th. косинусов)

$AB^2 = 2AC^2 - 2AC^2 \cos\angle C = 2AC^2(1 - \cos\angle C)$ (т.к. $AC = BC$)

$AB^2 = 2 \cdot 6^2 \cdot (1 - \cos 120^\circ) = 72(1 + \cos 60^\circ) = 72 \cdot \frac{3}{2} = 108$

$AB = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$ см.

$R = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6\sqrt{3}}{4 \cdot 9\sqrt{3}} = 6$ см.

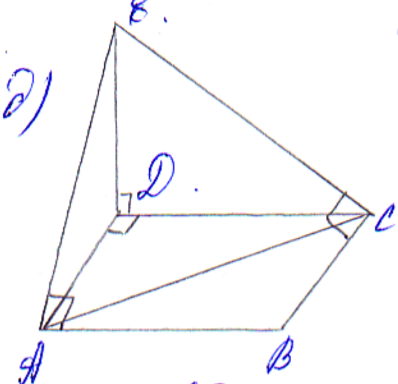
4) ΔCOM - прямоугольный (т.к. $OM \perp (ABC) \Rightarrow OM \perp CO$)

$CM^2 = OM^2 + CO^2$ (th Пифагора)

$OM^2 = CM^2 - CO^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$; $OM = \sqrt{64} = 8$ см.

Ответ: $OM = 8$ см.

д)



Дано: $ABCD$-прямоугольник; $AC = 7$ см; $ED \perp (ABCD)$; $CE = 9$ см; $AE = 4$ см.

Найти: ED.

1) $CD \perp BC$, $ED \perp CD \Rightarrow EC \perp BC$ (по th. о 3х перпендикулярах)

$AD \perp AB$, $ED \perp AD \Rightarrow AE \perp AB$ (по th. о 3х перпендикуляр)

2) ΔADC-прямоугольный: $AC^2 = AD^2 + CD^2$ (th. Пифагора)

Пусть $AD = x$, $CD = y$, тогда $x^2 + y^2 = 7^2$; $x^2 + y^2 = 49$.

3) ΔADE-прямоугольный: $AE^2 = ED^2 + AD^2$ (th Пифагора)

$ED^2 = AE^2 - AD^2 = 4^2 - x^2 = 16 - x^2$

4) ΔCDE - прямоугольный: $CE^2 = CD^2 + ED^2$ (th Пифагора)

$ED^2 = CE^2 - CD^2 = 9^2 - y^2 = 81 - y^2$; Получим уравнение:

$16 - x^2 = 81 - y^2$; $y^2 - x^2 = 81 - 16$; $y^2 - x^2 = 65$.

Мы пришли к системе уравнений:

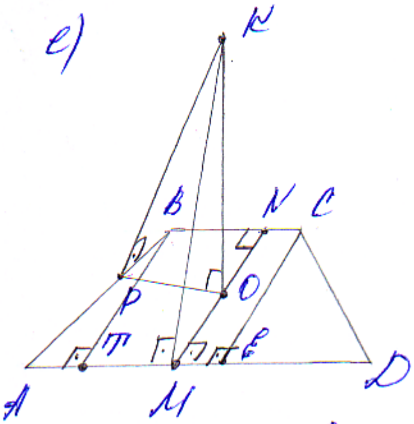
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 49 \\ y^2 - x^2 = 65 \end{cases}$$ Сложим уравнения системы:

$2y^2 = 114$; $y^2 = 57$; $y = \sqrt{57} \Rightarrow CD = \sqrt{57}$ см.

$ED^2 = 81 - y^2 = 81 - 57 = 24$; $ED = \sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = 2\sqrt{6}$ см.

Ответ: $ED = 2\sqrt{6}$ см.

е)



Дано: ABCD - равнобедренная трапеция; BC = 8см, AD = 18см. KP = MK = 10см.

Найти: OK.

1) Т.к. точка K - равноудалена от сторон трапеции ABCD, то точка O (проекция точки K) - центр вписанной окружности. R = OM = ON = OP - радиусы вписаной окружности

2) Т.к. в трапецию можно вписать окружность, то:
$BC + AD = AB + CD$, т.к. $AB = CD$
$BC + AD = 2CD \Rightarrow CD = \frac{BC+AD}{2} = \frac{18+8}{2} = 13$см.

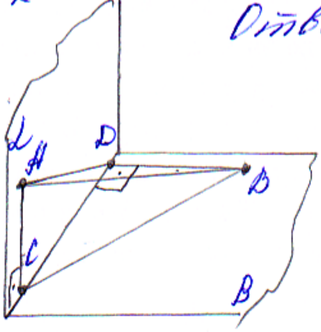
3) $CE \perp AD \Rightarrow \triangle CDE$ - прямоугольный; $CD = MN = 2R$.
$CD^2 = ED^2 + CE^2$ (th. Пифагора); $CE^2 = CD^2 - ED^2$

4) Т.к. трапеция ABCD - равнобедренная, то $\triangle CDE = \triangle ABT \Rightarrow AT = ED$
$AD = AT + TE + ED$; т.к. $TE = BC$, то $AD = 2ED + BC \Rightarrow$
$\Rightarrow ED = \frac{AD - BC}{2} = \frac{18-8}{2} = 5$см.
$CE^2 = CD^2 - ED^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$; $CE = \sqrt{144} = 12$ см.
$MN = 12$см; $MN = 2OM \Rightarrow OM = \frac{MN}{2} = \frac{12}{2} = 6$см.

5) $\triangle MOK$ - прямоугольный (т.к. $OK \perp MN$)
$MK^2 = OM^2 + OK^2$ (th. Пифагора); $OK^2 = MK^2 - OM^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$
$OK = \sqrt{64} = 8$см

Ответ: OK = 8см.

ж)



Дано: $\alpha \perp \beta$, $A \in \alpha$; $B \in \beta$; BC = 20см.
AD = 16 см, CD = 12 см.

Найти: AB.

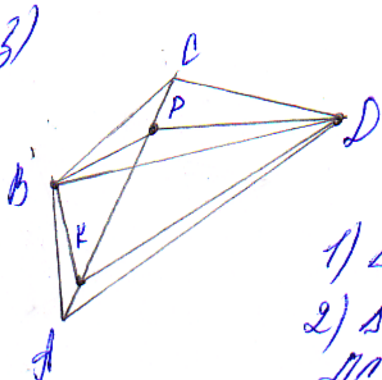
1) $BD \perp CD$, $AC \perp CD \Rightarrow AD \perp CD$ (по th. о 3-х перпендикулярах); $\triangle ADB$ - прямоугольный;

2) $\triangle CDB$ - прямоугольний: $BC^2 = CD^2 + DB^2$ (th. Пифагора)
$DB^2 = BC^2 - CD^2 = 20^2 - 12^2 = 400 - 144 = 256$; $DB = \sqrt{256} = 16$ см.

3) $\triangle ADB$: $AB^2 = DB^2 + AD^2 = 16^2 + 16^2 = 256 + 256 = 512$;
$AB = \sqrt{512} = \sqrt{256 \cdot 2} = 16\sqrt{2}$ см.

Ответ: $AB = 16\sqrt{2}$ см

3)



Дано: $(ACD) \perp (ABD)$; $AB = CD = 6$ см;
$BC = AD = 8$ см.
Найти: BD.

1) $\Delta ABC = \Delta ACD \Rightarrow PD = BK$ (высоты ΔABC и ΔACD)
2) ΔABC - прямоугольный: $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (th. Пифагора)
$AC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$; $AC = \sqrt{100} = 10$ см.
3) Пусть $AK = x$, $CK = AC - AK = 10 - x$. По свойству катета прямоугольного треугольника: $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AK} \Rightarrow AK = \frac{AB^2}{AC} = \frac{6^2}{10} = \frac{36}{10} = 3{,}6$ см.
$CK = 10 - 3{,}6 = 6{,}4$ см; $CP = AK = 3{,}6$ см (из равенства ΔABC и ΔACD)
$KP = CK - CP = 6{,}4 - 3{,}6 = 2{,}8$ см.
4) ΔKPD - прямоугольный (т.к. $PD \perp AC$), $KD^2 = PD^2 + KP^2$ (th. Пифагора)
PD - высота ΔACD. По свойству высоты прямоугольного треугольника имеем: $\frac{AP}{PD} = \frac{PD}{CP} \Rightarrow PD = \sqrt{AP \cdot CP}$; $AP = CK = 6{,}4$
$PD = \sqrt{6{,}4 \cdot 3{,}6} = 4{,}8$ см.
$KD^2 = 4{,}8^2 + 2{,}8^2 = 23{,}04 + 7{,}84 = 30{,}88$; $KD = \sqrt{30{,}88}$ см.
5) ΔBKD - прямоугольный: $BD^2 = BK^2 + KD^2$ (th. Пифагора)
$BD^2 = 4{,}8^2 + 30{,}88 = 23{,}04 + 30{,}88 = 53{,}92$; $BD = \sqrt{53{,}92} = 2\sqrt{13{,}48} = 4\sqrt{3{,}37}$ см.

Ответ: $BD = 4\sqrt{3{,}37}$ см.

③ Измерение углов в стереометрии.

а) Точка A находится на расстоянии 9 см от плоскости $\mathcal{L}$. Наклонные AB и AC составляют с плоскостью α углы 45° и 60° соотвественно, а их проекции образуют угол 150°. Найти расстояние между основаниями наклонных.
б) Точки A и B принадлежат двум перпендикулярным плоскостям. Отрезок AB длиной 8 см образует с этими плоскостями углы 30° и 45° соответственно. Найти расстояние между основаниями перпендикуляров, проведенных из точек A и B к линии пересечения плоскостей.
в) Из точки K плоскости проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы по 30°, а между собой - угол 120°. Найти угол, образуемый проекциями наклонных.

г) Квадрат и прямоугольник, площади которых соответственно равны 36 $см^2$ и 54 $см^2$, имеют общую сторону. Их плоскости образуют угол 30°. Найти расстояние между параллельными сторонами квадрата и прямоугольника.

д) Через гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC проведена плоскость, образующая с плоскостью треугольника угол 30°. Найти расстояние от точки C до этой плоскости, если катеты треугольника равны 6 см и 8 см.

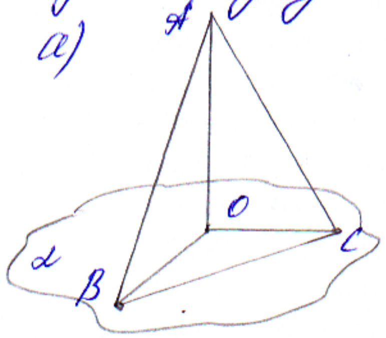
е) Равнобедренные треугольники ABC и ABD имеют общее основание AB, равное 24 см. Их плоскости образуют угол 60°. Найти расстояние между вершинами треугольников, если BC = 15 см, BD = 13 см.

ж) Равнобедренные треугольники ABC и DBC имеют общее основание BC равное 12 см. Расстояние между их вершинами равно $2\sqrt{15}$ см. Найти угол между их плоскостями, если $AB = 2\sqrt{21}$ см, а $\angle BDC = 90°$.

з) Из точки M к плоскости α проведены две наклонные AM и BM, образующие углы 30° и 45° соотвественно с плоскостью α. Зная, что между собой наклонны перпендикулярны, найти угол между плоскостями α и (AMB).

и) Точка M равноудалена от вершин квадрата ABCD. Угол между плоскостью (ABC) и прямой AM равен α. Найти угол между плоскостями (ABC) и (AMB)

а)



Дано: α - плоскость, $AO \perp \alpha$, AB, AC - наклонные

$AO = 9$ см, $\angle ABO = 45°$, $\angle ACO = 60°$, $\angle COB = 150°$

Найти: BC.

1) $\triangle ABO$ - прямоугольный ($AO \perp \alpha \Rightarrow AO \perp BO$)

$tg\angle ABO = \frac{AO}{BO} \Rightarrow BO = \frac{AO}{tg45°} = \frac{9}{1} = 9$ см.

2) $\triangle ACO$ - прямоугольный ($AO \perp \alpha \Rightarrow AO \perp CO$)

$tg\angle ACO = \frac{AO}{CO} \Rightarrow CO = \frac{AO}{tg\angle ACO} = \frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$ см.

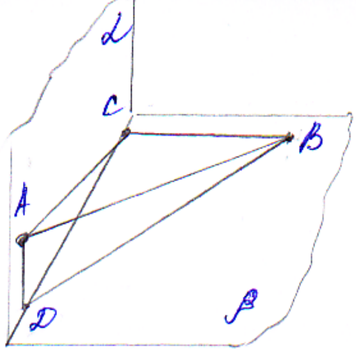
3) $\triangle BOC$: $BC^2 = BO^2 + CO^2 - 2BO \cdot CO\cos\angle BOC$ (Th косинусов)

$BC^2 = 9^2 + (3\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 9 \cdot 3\sqrt{3}\cos 150° = 81 + 27 + 54\sqrt{3}\cos 30 = 108 + 54\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= 189$; $BC = \sqrt{189} = 3\sqrt{21}$ см

Ответ: $BC = 3\sqrt{21}$ см.

б)



Дано: $\alpha \perp \beta$, $A \in \alpha$, $B \in \beta$, $AB = 8$ см; $\angle CAB = 30°$; $\angle ABD = 45°$.

Найти: CD.

1) $\triangle ACB$ - прямоугольный ($BC \perp \alpha \Rightarrow BC \perp AC$)

$\cos\angle CAB = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC = AB\cos\angle CAB = 8\cdot\cos 30 = 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ см

2) $\triangle ADB$ - прямоугольный ($AD \perp \beta \Rightarrow AD \perp DB$)

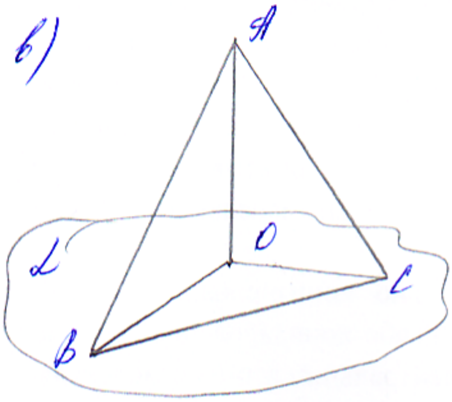
$\sin\angle ABD = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AD = AB\sin\angle ABD = 8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$ см.

3) $\triangle ACD$ - прямоугольный ($AD \perp CD$): $AC^2 = AD^2 + CD^2$ (th Пифагора)

$CD^2 = AC^2 - AD^2 = (4\sqrt{3})^2 - (4\sqrt{2})^2 = 48 - 32 = 16$; $CD = \sqrt{16} = 4$ см

Ответ: $CD = 4$ см.

в)



Дано: α - плоскость, $AO \perp \alpha$, AB, AC - наклонные, $\angle ABO = \angle ACO = 30°$, $\angle BAC = 120°$

Найти: $\angle BOC$

В задаче не даны линейные размеры фигуры, но поскольку значения тригонометрических функций от длин сторон фигуры не зависят, а определяются только величиной угла, то мы можем обозначить длину одной из сторон как a, а все остальные выразить через a. Пусть длина перпендикуляра $AO = a$.

1) $\triangle AOB = \triangle AOC$ (т.к. AO - общая, $\angle ABO = \angle ACO$): $AB = AC$; $BO = CO$

$tg\angle AOB = \frac{AO}{BO} \Rightarrow BO = \frac{AO}{tg 30°} = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3a}{\sqrt{3}} = \frac{3a\sqrt{3}}{3} = a\sqrt{3}$.

$\sin\angle AOB = \frac{AO}{AB} \Rightarrow AB = \frac{AO}{\sin 30°} = \frac{a}{\frac{1}{2}} = 2a$.

2) $\triangle ABC$: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cos\angle BAC$ (th косинусов)

$BC^2 = 2AB^2 - 2AB^2\cos\angle BAC = 2\cdot(2a^2) - 2\cdot(2a)^2\cos 120° = 4a^2 + 8a^2\cos 60 =$
$= 4a^2 + 4a^2 = 8a^2$; $BC = \sqrt{8a^2} = a\sqrt{8} = 2a\sqrt{2}$.

3) $\triangle BOC$: $BC^2 = BO^2 + CO^2 - 2BO\cdot CO\cos\angle BOC$ (th. косинусов)

$BC^2 = 2BO^2 - 2BO^2\cos\angle BOC$

$8a^2 = (a\sqrt{3})^2\cdot 2 - 2(a\sqrt{3})^2\cos\angle BOC$

$8a^2 = 6a^2 - 6a^2\cos\angle BOC$

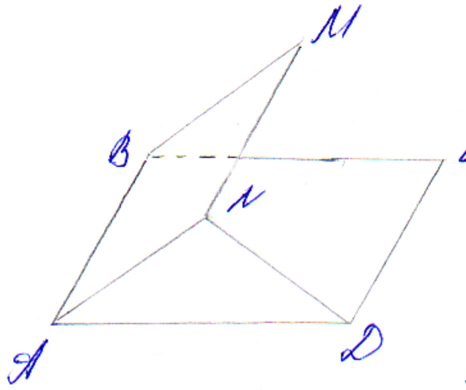
$2a^2 = -6a^2\cos\angle BOC \mid :2a^2$

$1 = -3\cos\angle BOC$

$\cos\angle BOC = -\frac{1}{3}$; $\angle BOC = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{3}$.

Ответ: $\angle BOC = \pi - \arccos\frac{1}{3}$.

г)



Дано: ABCD - прямоугольник, ABMN - квадрат; $S_{ABMN}=36$ см^2; $S_{ABCD}=54$ см^2; $\angle NAD=30°$.

Найти: ND

1) $AD\perp AB$, $AN\perp AB \Rightarrow \angle NAD$ - угол между плоскостями (ABCD) и (ABMN)

2) Площадь прямоугольника ABCD: $S_{ABCD}=AB\cdot BC$

Площадь квадрата ABMN: $S_{ABMN}=AB^2 \Rightarrow AB=\sqrt{S_{ABMN}}=\sqrt{36}=6$ см.

$BC=\frac{S_{ABCD}}{AB}=\frac{54}{6}=9$ см; $AD=BC=9$ см.

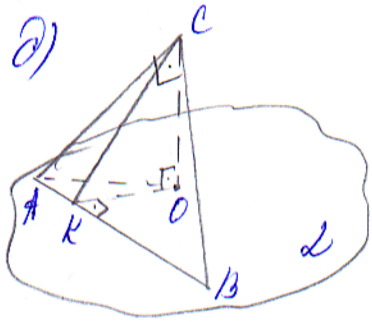
3) ΔNAD: $ND^2=AN^2+AD^2-2AN\cdot AD\cos\angle NAD$ (th. косинусов)

$ND^2=6^2+9^2-2\cdot6\cdot9\cos30°=36+81-108\cdot\frac{\sqrt3}{2}=117-54\sqrt3$; $ND=\sqrt{117-54\sqrt3}$

$=\sqrt{9(13-6\sqrt3)}=3\sqrt{13-6\sqrt3}$ см.

Ответ: $ND=3\sqrt{13-6\sqrt3}$ см.

д)



Дано: α - плоскость, ΔABC - прямоугольный; $AB\in\alpha$; $AC=6$ см, $BC=8$ см; $\angle CKO=30°$

Найти: CO

1) $OK\perp AB$, $CO\perp OK \Rightarrow CK\perp AB$ (по th о 3х перпендикулярах)

CK - высота ΔABC

2) ΔABC - прямоугольный: $AB^2=AC^2+BC^2$ (th. Пифагора)

$AB^2=6^2+8^2=36+64=100$; $AB=\sqrt{100}=10$ см.

3) Найдем площадь ΔABC: $S=\frac12 AC\cdot BC$; $S=\frac12 AB\cdot CK$

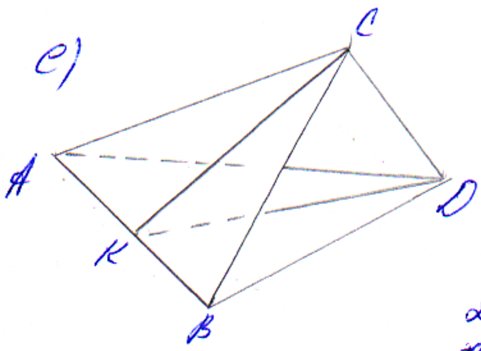
$\frac12 AC\cdot BC=\frac12 AB\cdot CK \Rightarrow CK=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{6\cdot8}{10}=4{,}8$ см.

4) ΔCKO - прямоугольный: $\sin\angle CKO=\frac{CO}{CK}\Rightarrow CO=CK\sin\angle CKO=$

$=4{,}8\cdot\frac12=2{,}4$ см.

Ответ: $CO=2{,}4$ см.

е)



Дано: ΔABC и ΔABD - равнобедренные; $AB=24$ см; $BC=15$ см; $BD=13$ см; $\angle CKD=60°$

Найти: CD

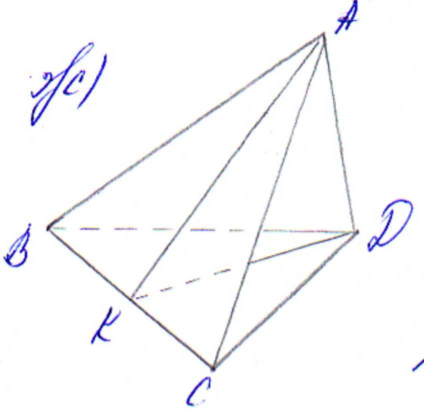
1) ΔABC: CK - высота, медиана; $AK=\frac12 AB=12$ см.

2) ΔACK - прямоугольный: $AC^2=CK^2+AK^2$;

$CK^2=AC^2-AK^2=15^2-12^2=225-144=81$; $CK=9$ см.

3) ΔADK - прямоугольный (т.к. DK - высота и медиана ΔABD)
$AD^2 = AK^2 + DK^2$ (th. Пифагора) $\Rightarrow DK^2 = AD^2 - AK^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$
$DK = 5$ см.
4) ΔCDK: $CD^2 = CK^2 + DK^2 - 2CK \cdot DK \cos\angle CKD$ (th. косинусов)
$CD^2 = 9^2 + 5^2 - 2 \cdot 9 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ = 81 + 25 - 90 \cdot \frac{1}{2} = 61$; $CD = \sqrt{61}$ см.
Ответ: $CD = \sqrt{61}$ см.

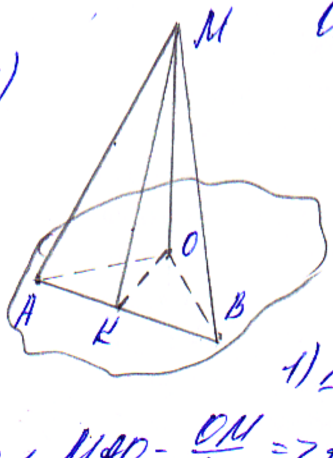
7(с)



Дано: ΔABC и ΔBDC - равнобедренные;
$BC = 12$ см, $AD = 2\sqrt{15}$ см, $AB = 2\sqrt{21}$ см
$\angle BDB = 90^\circ$
Найти: $\angle AKD$

1) ΔABK - прямоугольный (т.к. AK - высота и медиана, $BK = \frac{1}{2}BC = 6$ см); $AB^2 = BK^2 + AK^2$ (th. Пифагора)
$AK^2 = AB^2 - BK^2 = (2\sqrt{21})^2 - 6^2 = 84 - 36 = 48$; $AK = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ см.
2) ΔDBC - равнобедренный, прямоугольный, значит $\angle DBC = 45^\circ$.
KD - высота, медиана $\Rightarrow \Delta KBD$ - прямоугольный
3) ΔKBD: $tg\angle DBK = \frac{KD}{BK} \Rightarrow KD = BK\, tg\angle DBK = 6\, tg 45^\circ = 6$ см.
4) ΔADK: $AD^2 = KD^2 + AK^2 - 2KD \cdot AK\cos\angle AKD$ (th. косинусов)
$-2KD AK\cos\angle AKD = AD^2 - KD^2 - AK^2$
$$\cos\angle AKD = \frac{KD^2 + AK^2 - AD^2}{2KD \cdot AK} = \frac{6^2 + (4\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{15})^2}{2 \cdot 6 \cdot 4\sqrt{3}} = \frac{36 + 48 - 60}{48\sqrt{3}} =$$
$$= \frac{24}{48\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \angle AKD = \arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$$
Ответ: $\angle AKD = \arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$

8)



Дано: α - плоскость, $OM \perp \alpha$, AM, BM - наклонные
$\angle MAO = 30^\circ$, $MBO = 45^\circ$, $\angle AMB = 90^\circ$
Найти: $\angle MKO$
Т.к. линейные размеры не даны, то обозначим перпендикуляр $OM = a$.
1) ΔMAO - прямоугольный ($OM \perp \alpha \Rightarrow OM \perp AO$)
$\sin\angle MAO = \frac{OM}{AM} \Rightarrow AM = \frac{OM}{\sin\angle MAO} = \frac{a}{\sin 30} = \frac{a}{\frac{1}{2}} = 2a$
2) ΔMBO - прямоугольный ($OM \perp \alpha \Rightarrow OM \perp BO$)
$\sin\angle MBO = \frac{OM}{BM} \Rightarrow BM = \frac{OM}{\sin\angle MBO} = \frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2a}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$
3) Найдем площадь ΔABM: $S = \frac{1}{2}AB \cdot MK$; $S = \frac{1}{2}AM \cdot BM$

$\frac{1}{2} AB\cdot MK = \frac{1}{2} AM\cdot BM \Rightarrow MK = \frac{AM\cdot BM}{AB}$.

По th. Пифагора: $AB^2 = MA^2 + MB^2 = (2a)^2 + (a\sqrt{2})^2 = 4a^2 + 2a = 6a^2$

$AB = \sqrt{6a^2} = a\sqrt{6}$.

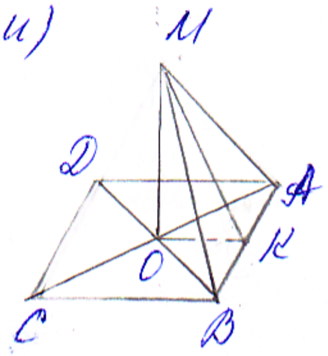
$MK = \frac{2a\cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{6}} = \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{2a\sqrt{12}}{6} = \frac{a\sqrt{12}}{3} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

4) $\triangle MOK$ – прямоугольный: $\sin\angle MKO = \frac{MO}{MK} = \frac{a}{\frac{2a\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} =$

$= \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle MKO = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} = 60°$.

Ответ: $\angle MKO = 60°$

11)



Дано: ABCD - квадрат; $M \notin (ABCD)$; $AM = BM$;
$\angle MAO = \alpha$

Найти: $\angle MKO$.

Пусть сторона квадрата $AB = a$

1) Т.к. точка M равноудалена от плоскости (ABCD), то ее проекция на ~~к~~ эту плоскость – точка O – центр описанной окружности. $OA = R$ – радиус описанной окружности. $OA = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $OK = \frac{a}{2}$

2) $\triangle MOA$ – прямоугольный: $tg\alpha = \frac{OM}{OA} \Rightarrow OM = OA\, tg\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{2} tg\alpha$

3) $\triangle MOK$ – прямоугольный: $tg\angle MKO = \frac{OM}{OK} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} tg\alpha}{\frac{a}{2}} =$
$= \sqrt{2}\, tg\alpha$.

$\angle MKO = arctg(\sqrt{2}\, tg\alpha)$

Ответ: $\angle MKO = arctg(\sqrt{2}\, tg\alpha)$

Задачи для самостоятельного решения.

I) Перпендикулярность прямой и плоскости

а) Из вершины А равнобедренного прямоугольного треугольника АВС проведен перпендикуляр АК к плоскости треугольника. Найти расстояния от точки К до вершин треугольника, если его гипотенуза ВС равна $12\sqrt{2}$ см, а $\angle KBA = 30^\circ$.

б) Из вершины С прямоугольника ABCD к его плоскости проведен перпендикуляр СМ. Стороны прямоугольника равны 3см и 4см, а расстояние от точки М до вершины А равно 13см. Найти длину перпендикуляра СМ.

в) Из точки М к плоскости α проведены две наклонные ВМ и АМ, длины которых относятся как 5:7. Найти расстояние от точки М до плоскости α, если проекции наклонных равны 12см и $12\sqrt{5}$ см.

г) Из точки М к плоскости α проведены две наклонные длинами 5см и 9см. Разность длин их проекций составляет 2см. Найти расстояние от точки М до плоскости α.

д) В прямоугольнике ABCD одна сторона вдвое больше другой. Из вершины В к плоскости прямоугольника проведен перпендикуляр BF равный 7см. Расстояние от точки F до точки D равно 12см. Найти периметр прямоугольника.

е) В ромбе ABCD сторона равна 10см, а диагональ BD равна 12см. Из точки С перпендикулярно плоскости ромба проведена прямая СМ равная 16см. Найти длину наклонной МА.

ж) Из точки М к плоскости α проведены наклонные АМ и ВМ и перпендикуляр СМ, равный 8см. Расстояние между основаниями наклонных составляет $\sqrt{316}$ см, а угол между проекциями равен 120°. Найти длину наклонной ВМ, если длина наклонной АМ равна 10см.

з) Из точки М к плоскости α проведены две равные наклонные МА и МВ и перпендикуляр МО. Расстояние между основаниями наклонных равно $12\sqrt{2}$ см. Найти длину перпендикуляра МО если между собой наклонные перпендикулярны, а $\angle ABO = 30^\circ$.

11) Теорема о трех перпендикулярах

а) Из точки пересечения диагоналей ромба проведен к его плоскости перпендикуляр длиной 2см. Найти расстояние от вершины перпендикуляра до стороны ромба, если его диагонали равны 16см и 12см.

б) Прямая FC перпендикулярна плоскости ромба ABCD, причем DB = FC = 20см, а угол BAD равен 60°. Найти расстояние от точки F до прямых, содержащих стороны ромба

в) Из вершины угла C треугольника ABC к его плоскости проведен перпендикуляр CN. Расстояние от точки N до стороны AB равно 26см. Найти расстояние от точки N до плоскости треугольника, если его стороны равны: AC=30см; BC=26см; AB=28см.

г) Из вершины прямого угла B треугольника ABC к его плоскости проведен перпендикуляр BN. Расстояние от точки N до гипотенузы равно 13см. Найти расстояние от точки N до плоскости треугольника, если AC=25см; AB=15см.

д) Диагонали ромба равны 60см и 80см. Точка S равноудалена от всех сторон ромба на 28см. Найти расстояние от точки S до плоскости ромба

е) Точка D равноудалена на 5см от сторон треугольника ABC. Найти расстояние от точки D до плоскости треугольника, если AB=13см, BC=14см, а ∠B=60°

ж) Катеты прямоугольного треугольника равны 14см и $8\sqrt{2}$ см. Точка K равноудалена от всех вершин треугольника на 15см. Найти расстояние от точки K до плоскости треугольника

з) В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине B равен 150° а боковые стороны составляют по 15см. Точка K равноудалена от его вершин на 39см. Найти расстояние от точки K до плоскости треугольника

и) Стороны прямоугольника равны 12см и 16см. Из середины F меньшей его стороны к плоскости прямоугольника проведен перпендикуляр FT длиной 2см. Найти расстояние от точки T до диагоналей прямоугольника

к) Точка M принадлежит диагонали AC прямоугольника ABCD. Из точки M к плоскости прямоугольника проведен перпендикуляр MK длиной 4см, а стороны прямоугольника равны 8см и 15см. Найти расстояние от точки K до меньшей стороны прямоугольника, если AM:MC = 3:1.

л) Основания равнобедренной трапеции равны 2см и 14см. Точка К равноудалена от сторон трапеции и находится на расстоянии 6см от плоскости трапеции. Найти расстояние от точки К до сторон трапеции.

м) Концы отрезка длиной 25см принадлежат перпендикулярным плоскостям, а расстояния от концов отрезка до линии пересечения плоскостей равны 20см и 9см. Найти расстояние между основаниями перпендикуляров, проведенных из концов отрезка к линии пересечения плоскостей.

н) Точки А и В принадлежат двум перпендикулярным плоскостям, AD и BC - перпендикуляры, проведенные из точек А и В к линии пересечения плоскостей, равные соответственно 5см и 6см. Найти длину отрезка АВ, если расстояние между основаниями перпендикуляров, проведенных к линии пересечения плоскостей равно 12см.

о) Прямоугольник ABCD перегнут по диагонали BD так, что плоскости треугольников ABD и CBD оказались перпендикулярными. Найти расстояние между точками А и С, если АВ=30см, BD=50см.

III Измерение углов в стереометрии.

а) Точка К находится на расстоянии 6см от плоскости α. Наклонные АК и ВК образуют с плоскостью углы 45° и 30°, а между собой - угол 135°. Найти расстояние между точками А и В.

б) Из точки В к плоскости α проведены две наклонные ВА и ВС, образующие с плоскостью углы 60° и 30° соответственно. Угол между их проекциями равен 120°. Найти расстояние между точками А и В, если длина наклонной ВА равна $4\sqrt{6}$ см.

в) Концы отрезка АВ, равного 8см, принадлежат перпендикулярным плоскостям. Этот отрезок образует с данными плоскостями углы 45° и 60°. Найти расстояние между основаниями перпендикуляров, проведенных из концов отрезка к линии пересечения плоскостей.

г) Из вершины прямого угла С треугольника АВС с острым углом 30° проведен к его плоскости перпендикуляр СК. Прямые АК и ВК образуют с плоскостью треугольника углы 30° и 60°. Найти угол между прямыми АК и ВК.

д) Квадрат ABCD и равнобедренный прямоугольный треугольник FBC ($\angle BFC = 90°$) имеют общую сторону BC, а их плоскости образуют угол 45°. Площадь квадрата равна 100 $см^2$, а площадь прямоугольного треугольника 32 $см^2$. Найти расстояние от точки F до прямой AD.

е) Боковая сторона BC равнобедренного треугольника ABC принадлежит плоскости α. Угол между плоскостью треугольника и плоскостью α равен 60°. Найти расстояние от вершины A до плоскости α, если AB=BC=13см, AC=10см.

ж) Через сторону AB треугольника ABC проведена плоскость, образующая с плоскостью треугольника угол 45°. Найти расстояние от вершины C до этой плоскости, если AB=14см, BC=13см, AC=15см.

з) Плоскости равнобедренных треугольников ABC и ABD образуют угол 60°, общее их основание равно 24см. Боковая сторона треугольника ABC AC=20см. Найти расстояние между вершинами C и D, если известно, что угол ADB - прямой.

и) Равнобедренные треугольники ABC и ABD имеют общее основание, равное 12см. Угол между их плоскостями равен 60°, $\angle ABC = 60°$, $\angle ADC = 120°$. Найти длину отрезка BD.

к) Два равнобедренных треугольника MNK и MEK имеют общее основание MK, равное 10см. Найти угол между их плоскостями, если их боковые стороны MN и EN соответственно равны $5\sqrt{3}$ см и $\sqrt{74}$ см, а расстояние между вершинами EK = 13см.

л) Из точки M, не принадлежащей плоскости α, проведены к ней наклонные MA и MB, образующие с плоскостью α углы 45° и 60° соответственно. Угол между проекциями наклонных равен 150°. Найти угол между плоскостями α и (MAB).

м) Из точки A, лежащей вне плоскости α, проведены к ней наклонные AB и AC, образующие с плоскостью α углы 30° и 60° соответственно. Их проекции перпендикулярны. Найти угол между плоскостями α и (ABC)

н) Точка M равноудалена от вершин правильного треугольника ABC. Угол между прямой MA и плоскостью (ABC) равен α. Найти угол между плоскостями (ABC) и (MAB)

о) Точка K равноудалена от вершин квадрата ABCD. Угол между прямой AK и плоскостью (ABC) равен β. Найти угол между плоскостями (ABK) и (ADK).