Первообразная и интеграл.
Применение интеграла.

① Вычисление первообразных.

Найти первообразную функции $y=f(x)$, график которой проходит через заданную точку:

а) $y=3x^2-6x+4$, $A(1,4)$ б) $y=\frac{5}{2\sqrt{x}}+x$, $B(4;-3)$

в) $y=\frac{12}{\sqrt{3x-2}}$; $B(9;30)$ г) $y=\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}+4\cos 4x$; $A(\pi;3)$

д) $y=6x^2+e^{4x}$; $C(\frac{1}{2};\frac{1}{4}e^2)$ е) $y=\frac{x^4-3x^2+1}{x^2}$; $A(1;5)$

ж) $y=\cos^2 4x$; $C(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ з) $y=\sin 3x\cos 2x$; $B(0;-\frac{3}{5})$

Решение.

а) Найдем общий вид первообразной для функции $y=f(x)$

$F(x)=\int f(x)dx+C$.

$F(x)=\int(3x^2-6x+4)dx=\int 3x^2dx-\int 6xdx+\int 4dx=3\cdot\frac{x^3}{3}-6\cdot\frac{x^2}{2}+4x+C=$
$=x^3-3x^2+4x+C$.

Если $F(x)$ проходит через точку $(1;4)$, то $F(1)=4$. Из этого уравнения найдем постоянную интегрирования C:

$1^3-3\cdot1^2+4\cdot1+C=4$

$1-3+4+C=4$

$C=2$

$F(x)=x^3-3x^2+4x+2$.

б) $y=\frac{5}{2\sqrt{x}}+x$; $B(4;-3)$

Найдем общий вид первообразной для функции $f(x)$

$F(x)=\int f(x)dx+C$

$F(x)=\int(\frac{5}{2\sqrt{x}}+x)dx=\int(\frac{5}{2}x^{-\frac{1}{2}}+x)dx=\frac{5}{2}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+\frac{x^2}{2}+C=\frac{5}{2}\cdot2\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}+$
$+C=5\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}+C$.

Найдем постоянную интегрирования из условия $F(4)=-3$

$5\sqrt{4}+\frac{4^2}{2}+C=-3$

$10+8+C=-3$;

$C = -21$

Первообразная примет вид: $F(x) = 5\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} - 21$.

в) $y = \frac{12}{\sqrt{3x-2}}$; $B(9;30)$

Найдем общий вид первообразной для функции $f(x)$

$F(x) = \int \frac{12dx}{\sqrt{3x-2}} = \int 12(3x-2)^{-\frac{1}{2}}dx = 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$

$= 4 \cdot 2\sqrt{3x-2} + C = 8\sqrt{3x-2} + C$.

Найдем постоянную интегрирования из условия $F(9) = 30$.

$8 \cdot \sqrt{3 \cdot 9 - 2} + C = 30$

$8 \cdot 5 + C = 30$

$C = -10$.

Первообразная примет вид: $F(x) = 8\sqrt{3x-2} + C$.

г) $y = \frac{1}{3}\sin\frac{x}{3} + 4\cos 4x$; $A(\pi; 3)$

Найдем общий вид первообразных для функции $f(x)$

$F(x) = \int\left(\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3} + 4\cos 4x\right)dx = \int\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}dx + \int 4\cos 4x\,dx =$

$= -\frac{1}{3} \cdot 3\cos\frac{x}{3} + 4 \cdot \frac{1}{4}\sin 4x + C = -\cos\frac{x}{3} + \sin 4x + C$.

Найдем постоянную интегрирования из условия $F(\pi) = 3$:

$-\cos\frac{\pi}{3} + \sin 4\pi + C = 3$

$-\frac{1}{2} + 0 + C = 3$

$C = 3{,}5$.

Первообразная примет вид: $F(x) = -\cos\frac{x}{3} + \sin 4x + 3{,}5$.

д) $y = 6x^2 + e^{4x}$, $C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}e^2\right)$

Найдем общий вид первообразных для функции $f(x)$

$F(x) = \int(6x^2 + e^{4x})dx = \int 6x^2dx + \int e^{4x}dx = 6\frac{x^3}{3} + \frac{1}{4}e^{4x} + C = 2x^3 + \frac{1}{4}e^{4x} + C$.

Найдем постоянную интегрирования из условия $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}e^2$

$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{4}e^{4 \cdot \frac{1}{2}} + C = \frac{1}{4}e^2$

$2 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4}e^2 + C = \frac{1}{4}e^2$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^2 + C = \frac{1}{4}e^2$

$C = -\frac{1}{4}$

Первообразная примет вид: $F(x) = 2x^3 + \frac{1}{4}e^{4x} - \frac{1}{4}$

е) $y = \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{x^2}$; $A(1; 5)$

Найдем общий вид первообразных для функции $y = f(x)$

$F(x) = \int \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{x^2} dx = \int \left(\frac{x^4}{x^2} - \frac{3x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \int (x^2 - 3 + x^{-2}) dx =$

$= \int x^2 dx - \int 3 dx + \int x^{-2} dx = \frac{x^3}{3} - 3x + \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{x^3}{3} - 3x - \frac{1}{x} + C.$

Найдем постоянную интегрирования из условия $F(1) = 5$.

$\frac{1^3}{3} - 3 \cdot 1 - \frac{1}{1} + C = 5$

$\frac{1}{3} - 3 - 1 + C = 5$

$C = 8\frac{2}{3}.$

Первообразная примет вид: $F(x) = \frac{x^3}{3} - 3x - \frac{1}{x} + 8\frac{2}{3}.$

ж) $y = \cos^2 4x$; $C\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Найдем общий вид первообразных для функции $f(x)$.
Используем формулу понижения степени тригонометрических функций:

$F = \int \cos^2 4x\, dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2 \cdot 4x\right) dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 8x\right) dx = \int \frac{1}{2} dx +$

$+ \int \frac{1}{2}\cos 8x\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}\sin 8x + C = \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\sin 8x + C.$

Найдем постоянную интегрирования из условия $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{16}\sin 8 \cdot \frac{\pi}{2} + C = \frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{16}\sin 4\pi + C = \frac{\pi}{2}$

$C = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

Первообразная примет вид: $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\sin 8x + \frac{\pi}{4}.$

з) $y = \sin 3x \cos 2x$; $B\left(0; -\frac{3}{5}\right)$

Найдем общий вид первообразных для функции $f(x)$. Используем формулу произведения тригонометрических функций.

$F(x) = \int \sin 3x \cos 2x\, dx = \int \frac{1}{2}\left(\sin(3x+2x) + \sin(3x-2x)\right) dx = \int \frac{1}{2}(\sin 5x + \sin x) dx =$

$= \frac{1}{2}\int \sin 5x\, dx + \frac{1}{2}\int \sin x\, dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + C = -\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + C$

Найдем постоянную интегрирования из условия $F(0) = -\frac{3}{5}$

$-\frac{1}{10}\cos 5 \cdot 0 - \frac{1}{2}\cos 0 + C = -\frac{3}{5}$

$-\frac{1}{10} - \frac{1}{2} + C = -\frac{3}{5}$

$C = -\frac{3}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{-6 + 5 + 1}{10} = 0$

Первообразная примет вид: $F(x) = -\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x.$

(2) Вычисление определенных интегралов

Найти интегралы:

а) $\int\limits_{-1}^{2}(x^2-4x+5)dx$ б) $\int\limits_{1}^{3}\left(\frac{4}{x}-x\right)dx$

в) $\int\limits_{1}^{9}\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}dx$ г) $\int\limits_{-\pi}^{0}2\cos^2\frac{x}{8}dx$

д) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos 2x+\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}\right)dx$ е) $\int\limits_{0}^{\ln 4}\left(e^{2x}+2\right)^2dx$

ж) $\int\limits_{1}^{9}(2x-\sqrt{x})^2dx$ з) $\int\limits_{1}^{3}\frac{x^2+e^x}{x^2e^x}dx$

а) $\int\limits_{-1}^{2}(x^2-4x+5)dx=\int\limits_{-1}^{2}x^2dx-\int\limits_{-1}^{2}4xdx+\int\limits_{-1}^{2}5dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2}-\frac{4x^2}{2}\Big|_{-1}^{2}+5x\Big|_{-1}^{2}=$

$=\frac{2^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}-\left(2\cdot 2^2-2\cdot(-1)^2\right)+5\cdot(2-(-1))=\frac{8}{3}+\frac{1}{3}-(8-2)+5\cdot 3=$

$=\frac{9}{3}-6+15=3-6+15=12$

б) $\int\limits_{1}^{3}\left(\frac{4}{x}-x\right)dx=\cancel{\int(4x^{-1}}\int\limits_{1}^{3}\frac{4}{x}dx-\int\limits_{1}^{3}xdx=4\ln|x|\Big|_{1}^{3}-\frac{x^2}{2}\Big|_{1}^{3}=$

$=4(\ln 3-\ln 1)-\left(\frac{3^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right)=4\ln 3-4=4(\ln 3-1)$

в) $\int\limits_{1}^{9}\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}dx=\int\limits_{1}^{9}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx=\int\limits_{1}^{9}\left(1+2x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\int\limits_{1}^{9}dx+\int\limits_{1}^{9}2x^{-\frac{1}{2}}dx=$

$=x\Big|_{1}^{9}+2\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Big|_{1}^{9}=x\Big|_{1}^{9}+4\sqrt{x}\Big|_{1}^{9}=9-1+4(\sqrt{9}-\sqrt{1})=16.$

г) $\int\limits_{-\pi}^{0}2\cos^2\frac{x}{8}dx=\int\limits_{-\pi}^{0}2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\cdot\frac{x}{8}\right)dx=\int\limits_{-\pi}^{0}\left(1+\cos\frac{x}{4}\right)dx=\int\limits_{-\pi}^{0}dx+\int\limits_{-\pi}^{0}\cos\frac{x}{4}dx$

$=x\Big|_{-\pi}^{0}+4\sin\frac{x}{4}\Big|_{-\pi}^{0}=0-(-\pi)+4\cdot\left(\sin 0-\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\pi+4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\pi+2\sqrt{2}.$

д) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos 2x+\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}\right)dx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}2\cos 2x dx+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}dx=2\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}-$

$-\frac{1}{3}\cdot 3\cos\frac{x}{3}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\sin 2\cdot\frac{\pi}{2}-\sin 0-\cos\frac{\pi}{6}+\cos 0=0-0-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}.$

е) $\int\limits_{0}^{\ln 4}\left(e^{2x}+2\right)^2dx=\int\limits_{0}^{\ln 4}\left((e^{2x})^2+2\cdot 2e^{2x}+2^2\right)dx=\int\limits_{0}^{\ln 2}\left(e^{4x}+4e^{2x}+4\right)dx=$

$=\int\limits_{0}^{\ln 2}e^{4x}dx+\int\limits_{0}^{\ln 2}4e^{2x}+\int 4dx=\frac{1}{4}e^{4x}\Big|_{0}^{\ln 4}+4\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_{0}^{\ln 4}+4x\Big|_{0}^{\ln 4}=$

$=\frac{1}{4}e^{4\ln 4}-\frac{1}{4}e^{0}+2e^{2\ln 4}-2e^{0}+4\ln 4=\frac{1}{4}\left(e^{\ln 4}\right)^4-\frac{1}{4}\cdot 1+2\left(e^{\ln 4}\right)^2-2\cdot 1+4\ln 4=$

$=\frac{1}{4}\cdot 4^4-\frac{1}{4}+2\cdot 4^2-2+4\ln 4=64-\frac{1}{4}+32-2+4\ln 2^2=93\frac{3}{4}+8\ln 2.$

ж) $\int_1^9 (2x-\sqrt{x})^2 dx = \int_1^9 (4x^2-4x\sqrt{x}+x)dx = \int_1^9 4x^2dx - \int_1^9 4x^{\frac{3}{2}}dx + \int_1^9 xdx$

$= \frac{4x^3}{3}\Big|_1^9 - \frac{4x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\Big|_1^9 + \frac{x^2}{2}\Big|_1^9 = \frac{4x^3}{3}\Big|_1^9 - \frac{8}{5}\sqrt{x^5}\Big|_1^9 + \frac{x^2}{2}\Big|_1^9 = \frac{4}{3}(9^3-1^3) -$

$-\frac{8}{5}(\sqrt{9^5}-\sqrt{1^5}) + \frac{1}{2}(9^2-1^2) = \frac{4}{3}\cdot 728 - \frac{8}{5}\cdot 242 + \frac{1}{2}\cdot 80 = \frac{40\cdot 728 - 48\cdot 242 + 15\cdot 80}{30} =$

$= \frac{18704}{30} = \frac{9352}{15} = 623\frac{7}{15}$

з) $\int_1^3 \frac{x^2+e^x}{x^2e^x}dx = \int_1^3 \left(\frac{x^2}{x^2e^x} + \frac{e^x}{x^2e^x}\right)dx = \int_1^3 \left(\frac{1}{e^x}+\frac{1}{x^2}\right)dx = \int_1^3 (e^{-x}+x^{-2})dx =$

$= -e^{-x}\Big|_1^3 + \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^3 = -e^{-x}\Big|_1^3 - \frac{1}{x}\Big|_1^3 = -(e^{-3}-e^{-1}) - \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{1}\right) = e^{-1} - e^{-3} + \frac{1}{1} - \frac{1}{3} =$

$= \frac{1}{e} - \frac{1}{e^3} + \frac{2}{3} = \frac{e^2-1+2e^3}{2e^3}$

③ Применение интеграла

а) Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\sqrt{x-3}$ и прямыми $y=0$ и $x=7$.

б) Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=4-x^2$ и осью абсцисс.

в) Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+2x+2$ и прямой $y=2x+3$.

г) Найти площадь фигуры, ограниченной параболами $y=x^2$ и $y=2x-x^2$.

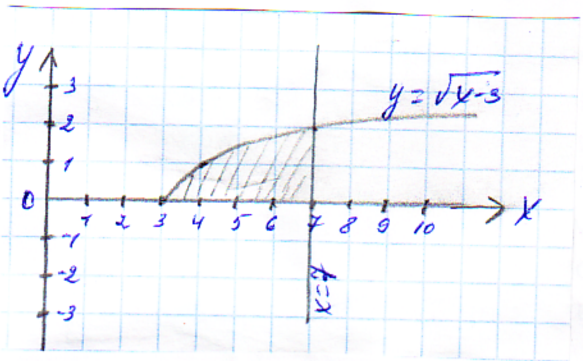
д) Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=\sqrt{7-x}$ и $y=\sqrt{x+1}$.

е) Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=2x-x^2$, касательной, проведенной к этой параболе в точке $x_0=2$ и осью ординат.

ж) При каком значении a прямая $x=a$ делит площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\frac{8}{x}$, осью абсцисс и прямыми $x=2$ и $x=8$, пополам?

з) Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной синусоидой $y=\sin x$ и прямыми $x=\frac{\pi}{4}$ и $x=\frac{3}{4}\pi$, $y=0$.

а) Построим графики функций.



Пределы интегрирования

$x_1=3 \quad x_2=7$

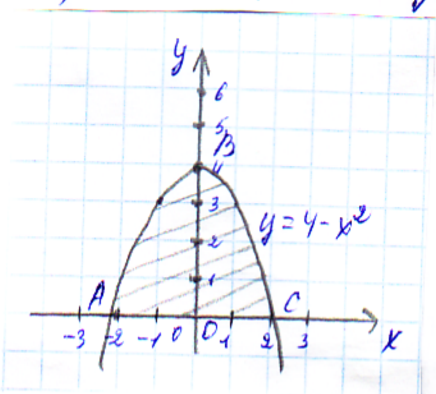
Площадь фигуры

$$S=\int_3^7\sqrt{x-3}\,dx=\int_3^7(x-3)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{(x-3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_3^7=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{(x-3)^3}\Big|_3^7=\frac{2}{3}\left(\sqrt{(7-3)^3}-\sqrt{(3-3)^3}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(2^3-0^3\right)=\frac{16}{3}=5\frac{1}{3}\text{ кв.ед.}$$

б) Построим графики функций



$y=4-x^2$ – парабола, ветви которой обращены вниз (т.к. $a=-1<0$)

Вершина: $(0;4)$

Точки пересечения с осью OX: $y=0$

$4-x^2=0$

$x^2=4$

$x_1=-2 \quad x_2=2$.

В силу симметричности параболы, площадь фигуры ABC будет равна двум площадям фигуры BOC.

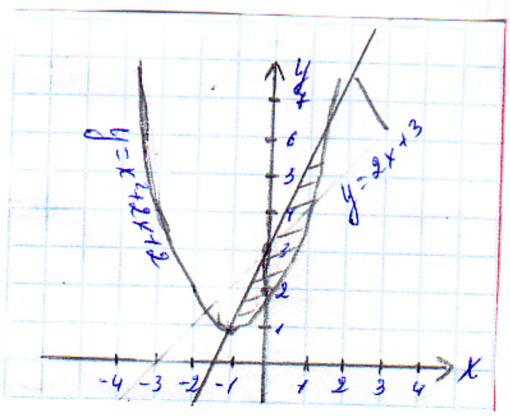
Пределы интегрирования: $a=0$, $b=2$.

$$S_1=\int_0^2(4-x^2)dx=\int_0^2 4dx-\int_0^2 x^2dx=4x\Big|_0^2-\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=(4\cdot 2-4\cdot 0)-\left(\frac{2^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right)=$$

$$=8-\frac{8}{3}=8-2\frac{2}{3}=5\frac{1}{3}\text{ кв.ед.}$$

$$S=2S_1=5\frac{1}{3}\cdot 2=\frac{16}{3}\cdot 2=\frac{32}{3}=10\frac{2}{3}\text{ кв.ед.}$$

в) Построим графики функций



1) $y=x^2+2x+2$ – парабола, ветви которой обращены вверх (т.к. $a=1>0$)

Найдем координаты вершины (x_0, y_0)

$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2}=-1$.

$y_0=y(-1)=(-1)^2+2\cdot(-1)+2=1$.

$(-1;1)$ – вершина

Точки пересечения со осью OX: $y=0$

$x^2+2x+2=0$

$D=4-4\cdot 2\cdot 1=-4$ – нет корней

Парабола ось OX не пересекает.

2) $y=2x+3$ - прямая. Т.к. для ее построения достаточно 2 точек, составим таблицу

x	0	-1
y	3	1

Найдем пределы интегрирования

$x^2+2x+2=2x+3$

$x^2+2x+2-2x-3=0$

$x^2-1=0$

$x^2=1$

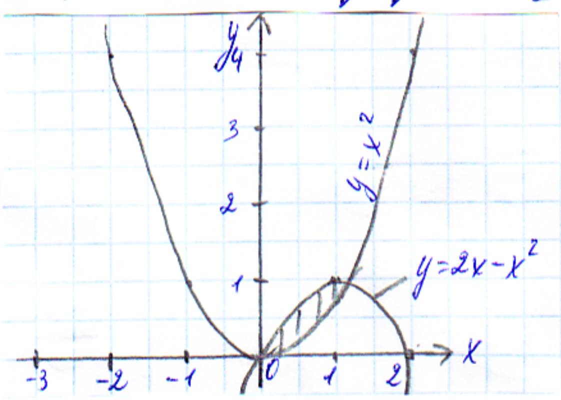
$x_1=1 \quad x_2=-1$.

Площадь фигуры

$$S=\int_{-1}^{1}(2x+3-(x^2+2x+2))dx=\int_{-1}^{1}(2x+3-x^2-2x-2)dx=\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=\int_{-1}^{1}dx-$$

$$-\int_{-1}^{1}x^2dx=x\Big|_{-1}^{1}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}=(1-(-1))-\left(\frac{1^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}\right)=2-\frac{2}{3}=1\frac{1}{3}\text{ кв.ед.}$$

г) Построим графики функций



1) $y=x^2$ - парабола, ветви которой направлены вверх ($a=1>0$

Вершина - $(0;0)$

2) $y=2x-x^2$ - парабола, ветви направлены вниз ($a=-1<0$)

Найдем координаты вершины (x_0, y_0)

$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2\cdot(-1)}=1$

$y_0=f(x_0)=2\cdot1-1^2=1$

Вершина параболы $(1;1)$

Найдем пределы интегрирования

$x^2=2x-x^2$

$2x^2-2x=0$

$2x(x-1)=0$

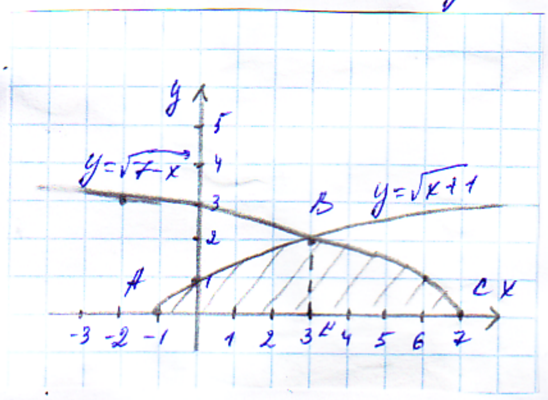
$x_1=0 \quad x_2=1$.

Найдем площадь фигуры:

$$S=\int_0^1(2x-x^2-x^2)dx=\int_0^1(2x-2x^2)dx=\int_0^1 2x\,dx-\int_0^1 2x^2dx=\frac{2x^2}{2}\Big|_0^1-\frac{2x^3}{3}\Big|_0^1$$

$$=(1^2-0^2)-\frac{2}{3}(1^3-0^3)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\text{ кв.ед.}$$

д) Построим графики функций.



1) $y=\sqrt{7-x}$ - ветвь параболы, направленная влево, $(7;0)$ - вершина

2) $y=\sqrt{x+1}$ - ветвь параболы, направленная вправо, $(-1;0)$ - вершина

Фигура, площадь которой надо вычислить, состоит из двух частей: ABK и CBK. Найдем абсциссу точки B (промежуточный предел интегрирования).

$\sqrt{x+1}=\sqrt{7-x}$

$(\sqrt{x+1})^2=(\sqrt{7-x})^2$

$x+1=7-x$

$2x=6$

$x=3.$

$S=S_{ABK}+S_{CBK}.$

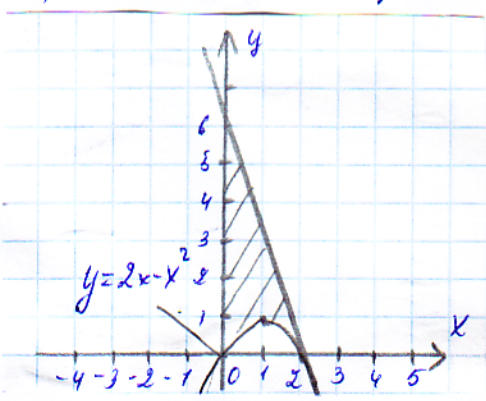
Найдем площади частей фигуры по отдельности.

$$S_{ABK}=\int_{-1}^{3}\sqrt{x+1}\,dx=\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{3}=\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}\Big|_{-1}^{3}=\frac{2}{3}\left(\sqrt{4^3}-\sqrt{0^3}\right)=\frac{2}{3}\cdot 8=\frac{16}{3}=5\frac{1}{3}$$

$$S_{CBK}=\int_{3}^{7}\sqrt{7-x}\,dx=-\frac{(7-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_{3}^{7}=-\frac{2}{3}\sqrt{(7-x)^3}\Big|_{3}^{7}=-\frac{2}{3}\left(\sqrt{0^3}-\sqrt{4^3}\right)=-\frac{2}{3}\cdot(-8)=\frac{16}{3}=5\frac{1}{3}$$

$S=5\frac{1}{3}+5\frac{1}{3}=10\frac{2}{3}$ кв. ед.

е) Построим графики функций.



1) $y=2x-x^2$ - парабола, ветви которой направлены вниз $(a=-1<0)$

Найдем координаты вершины: $(x_0;y_0)$

$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2\cdot(-1)}=1$

$y_0=f(x_0)=2\cdot1-1^2=1$

~~0,0~~ $(1;1)$ - вершина параболы

Точка пересечения с осью OX: $y=0$

$2x-x^2=0$

$x(2-x)=0$

$x_1=0;\quad x_2=2.$

2) Проведем касательную к параболе в точке $x=2$. Найдем ее уравнение:

$y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0)$ - общее уравнение касательной.

$y_0 = f(x_0) = 2\cdot 2 - 2^2 = 0.$

$y' = 2 - 2x$; $y'(2) = 2 - 2\cdot 2 = -2.$

Получим уравнение:

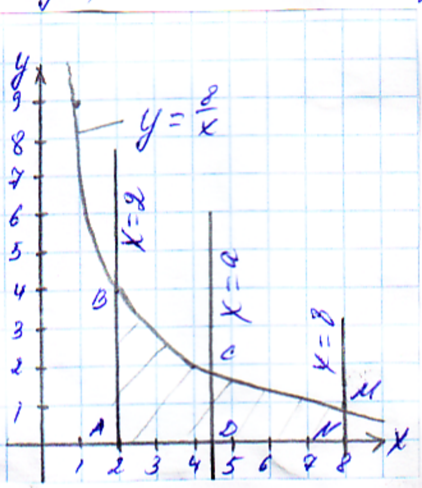
$y = -2(x-2) = -2x + 4 = 4 - 2x.$

Найдем площадь фигуры:

$S = \int_0^2 (4 - 2x - (2x - x^2))dx = \int_0^2 (4 - 2x - 2x + x^2)dx = \int_0^2 (4 - 4x + x^2)dx = \int_0^2 (x-2)^2 dx$

$= \frac{(x-2)^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{(2-2)^3}{3} - \frac{(0-2)^3}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ кв.ед.

э(с) Построим графики функций:



1) $y = \frac{8}{x}$ - гипербола. Нам потребуется только ~~ее~~ ветвь, лежащая в I четверти координат

2) $x=2$, $x=8$, $x=a$ - прямые, параллельные оси OY. Исходя из условия, что $x=a$ делит площадь фигуры пополам, придем к выводу, что $2 < a < 8$.

$S_{ABCD} = S_{DCMN}$.

Найдем эти площади по отдельности:

$S_{ABCD} = \int_2^a \frac{8}{x}dx = 8\ln|x|\Big|_2^a = 8(\ln a - \ln 2) = 8\ln\frac{a}{2}$

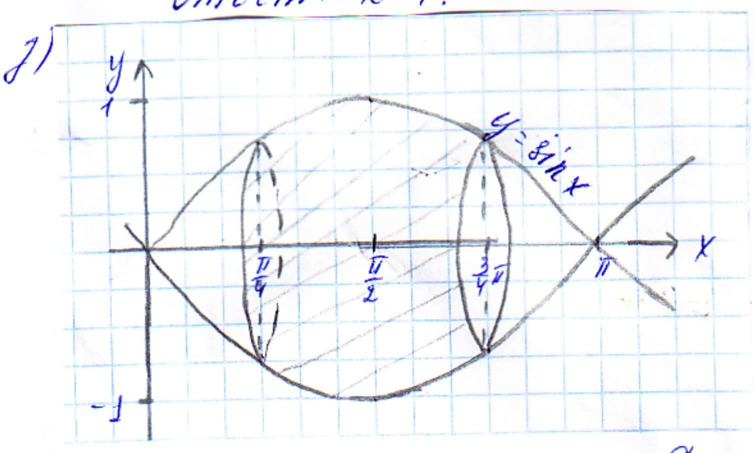
$S_{DCMN} = \int_a^8 \frac{8}{x}dx = 8\ln|x|\Big|_a^8 = 8(\ln 8 - \ln a) = 8\ln\frac{8}{a}$

$8\ln\frac{a}{2} = 8\ln\frac{8}{a}$; $\ln\frac{a}{2} = \ln\frac{8}{a} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{8}{a}$

$a^2 = 16$; $a_1 = 4$; $a_2 = -4$ (не подходит, т.к. $2 < a < 8$).

Ответ: $x = 4$.

д)



Построим в системе координат тело вращения. Его объем вычисляется по формуле:

$V = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx.$

Получим:

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычисление первообразной

Найти первообразную функции $y=f(x)$, график которой проходит через заданную точку

а) $y=3x^2-4x+5$, $A(2;6)$

б) $y=4x^3-2x+3$, $B(1;8)$

в) $y=\frac{3}{2\sqrt{x}}-2x$, $B(9;-8)$

г) $y=5x^4+3x^2-4$, $C(-1;12)$

д) $y=\frac{12}{\sqrt{4x-3}}$, $A(3;18)$

е) $y=\frac{2}{\sqrt{3x+4}}$, $C(4;5)$

ж) $y=6e^{3x-2}$, $A(1;5e)$

з) $y=16x^3+e^{\frac{x}{2}}$ $B(1;2\sqrt{e})$

и) $y=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}-5\sin 5x$, $C(\pi;0)$

к) $y=\sin^2\frac{x}{2}$ $B(\pi;2\pi)$

л) $y=\frac{x^5+4x^3-1}{x^3}$; $B(1;6)$

м) $y=\cos x\cos 2x$ $C\left(\frac{\pi}{2};\frac{1}{12}\right)$

н) $y=\frac{12}{3x+2}$; $M(2;\ln 8)$

о) $y=\frac{5}{x+3}-\frac{7}{2\sqrt{x+18}}$; $M(-2;-30)$

2. Вычисление определенного интеграла

а) $\int_{-2}^{1}(x^2-2x+4)dx$

б) $\int_{-1}^{2}(16x^3+9x^2-12x+1)dx$

в) $\int_{4}^{49}\frac{4-\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}dx$

г) $\int_{1}^{4}\left(\frac{3}{x}+x\right)dx$

д) $\int_{0}^{1}(x^3+\sqrt{x})^2dx$

е) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(3\sin 3x-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right)dx$

ж) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}2\sin^2\frac{x}{4}dx$

з) $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5}{12}\pi}\sin x\sin 3x\,dx$

и) $\int_{2}^{3}\frac{x^2-x+2}{x^4}dx$

к) $\int_{1}^{2}\frac{e^x-x^3}{x^3e^x}dx$

л) $\int_{1}^{4}\frac{2x^2+0{,}5x+3}{\sqrt{x}}dx$

м) $\int_{0}^{2}\frac{12^x-7\cdot 2^x}{4^x}dx$

3. Применение интеграла.

Найти площадь фигуры ограниченной линиями:

а) $y=x^2$, прямыми $x=2$ и $x=3$, а также осью абсцисс.

б) $y=\sqrt{x+4}$, осью абсцисс и прямой $x=5$.

в) параболой $y = 4x - x^2$ и осью абсцисс;

г) $y = \sqrt{x}$ и прямой $y = \frac{x}{2}$;

д) параболой $y = 8 - x^2$ и прямой $y = 4$;

е) параболой $y = x^2 - 4x + 5$ и прямой $y = 5 - x$;

ж) параболами $y = x^2$ и $y = 4x - x^2$;

з) параболами $y = 6 - x^2$ и $y = x^2 + 2x + 12$

и) гиперболой $y = \frac{3}{x}$ и прямыми $y = 3$, $x = 3$.

к) гиперболой $y = \frac{3}{x}$, прямыми $y = 2x + 1$ и $x = 3$.

л) графиками функции $y = \sqrt{5 - x}$ и $y = \sqrt{x - 13}$.

Найти объемы тел, ограниченных линиям и полученных вращение вокруг оси OX:

м) $y = \sqrt{x}$ и прямыми $y = 0$ и $x = 9$;

н) косинусоидой $y = \cos x$, прямыми $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{6}$, а также осью абсцисс.

(4) Задача на интеграл

а) При каком значении в прямая $x = в$ делит площадь фигуры, ограниченной гиперболой $y = \frac{4}{x}$ и прямыми $x = 4$ и $x = 9$, а также осью абсцисс, пополам?

б) При каком значении a площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 3x^2$, осью абсцисс и прямыми $x = a$, $x = 3 + a$, будет наименьшей?