Производная и ее применение.

Примеры решения задач.

① Вычисление производных.

Найти производную функции и ее значение в заданной точке

а) $y=4x^3+6x-3$; $x_0=-1$ б) $y=5x+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}+4$; $x_0=1$.

в) $y=(3x^2+2)\sqrt{x}$, $x_0=16$ г) $y=\frac{4x+1}{\sqrt{x^2-2}}$; $x_0=0$.

д) $y=\sqrt{5x^2-2x}$; $x_0=2$ е) $y=\ln(x^2-4x)$, $x_0=5$

ж) $y=\operatorname{tg} x^2$; $x_0=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ з) $y=\operatorname{arctg} 2x^2$; $x_0=1$.

и) $y=\frac{x^3}{\ln^3 x}$; $x_0=e^2$ к) $y=\frac{3x^2-7}{\sqrt{2x-3}}$; $x_0=2$

л) Решить неравенство $y'\geq 0$, если $y=\frac{x^2+6x}{2-x}$. Указать наибольшее целое решение.

м) Решить неравенство $f'(x)<g'(x)$, если $f(x)=\frac{x^4+3}{3x}$; $g(x)=\frac{1+4x^2}{x}$. Указать.

Решение.

а) По правилу дифференцирования суммы имеем:

$y'=(4x^3)'+(6x)'-(3)'=4\cdot 3x^2-6\cdot 1-0=12x^2-6$

При $x_0=-1$ получим

$y'(-1)=12\cdot(-1)^2-6=6$.

б) $y=5x+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}+4$.

Запишем данную функцию в виде $y=5x+3x^{-2}-2x^{-1}+4$, а после продифференцируем ее как многочлен.

$y'=(5x)'+(3x^{-2})'-(2x^{-1})'+(4)'=5+3\cdot(-2x^{-3})-2\cdot(-x^{-2})=$
$=5-6x^{-3}+2x^{-2}=5-\frac{6}{x^3}+\frac{2}{x^2}$

При $x_0=1$ получим:

$y'(+1)=5-\frac{6}{1}+\frac{2}{1}=1$.

в) $y=(3x^2+2)\sqrt{x}$

По правилу дифференцирования произведения имеем:

$$y' = (3x^2+2)' \cdot \sqrt{x} + (3x^2+2) \cdot (\sqrt{x})' = 6x\sqrt{x} + \frac{3x^2+2}{\sqrt{x}} = \frac{6x^2+3x^2+2}{\sqrt{x}} =$$
$$= \frac{9x^2+2}{\sqrt{x}}$$

При $x_0 = 16$ получим:

$$y'(16) = \frac{9 \cdot 256 + 2}{4} = 576{,}5.$$

г) $y = \dfrac{4x+1}{x^2-2}.$

~~Пр~~ По правилу дифференцирования дроби имеем:

$$y' = \frac{(4x+1)'(x^2-2) - (4x+1)\cdot(x^2-2)'}{(x^2-2)^2} = \frac{4(x^2-2) - (4x+1)\cdot 2x}{(x^2-2)^2} =$$
$$= \frac{4x^2-8-8x^2-2x}{(x^2-2)^2} = \frac{-4x^2-2x-8}{(x^2-2)^2} = -\frac{4x^2+2x+8}{(x^2-2)^2}.$$

При $x_0 = 0$ получим:

$$y'(0) = -\frac{4\cdot 0 + 2\cdot 0 + 8}{(0-2)^2} = -\frac{8}{4} = -2.$$

д) $y = \sqrt{5x^2-2x}$

Т.к. данная функция - сложная, что по соответствующему правилу дифференцирования получим:

$$y' = (\sqrt{5x^2-2x})' \cdot (5x^2-2x)' = \frac{1}{2\sqrt{5x^2-2x}} \cdot (10x-2) = \frac{2(5x-1)}{2\sqrt{5x^2-2x}} =$$
$$= \frac{5x-1}{\sqrt{5x^2-2x}}$$

При $x_0 = 2$ получим

$$y'(2) = \frac{5\cdot 2 - 1}{\sqrt{5\cdot 4 - 2\cdot 2}} = \frac{9}{\sqrt{20-4}} = \frac{9}{4} = 2{,}25.$$

е) $y = \ln(x^2-4x)$

По правилу дифференцирования сложной функции получим:

$$y' = (\ln(x^2-4x))' \cdot (x^2-4x)' = \frac{2x-4}{x^2-4x}$$

При $x_0 = 5$ получим

$$y'(5) = \frac{2\cdot 5 - 4}{25 - 4\cdot 5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5} = 1{,}2.$$

ж) $y = tg\, x^2$

По правилу дифференцирования сложной функции получим:

$$y' = (tg\,x^2)' \cdot (x^2)' = \frac{1}{\cos^2 x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{\cos^2 x^2}$$

При $x_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ получим

$$y'\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}}{\cos^2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{2}{4}} = \frac{4\sqrt{\pi}}{2} = 2\sqrt{\pi}.$$

з) $y = arcctg\,2x^2$

По правилу дифференцирования сложной функции получим.

$$y' = (arcctg\,2x^2)' \cdot (2x^2)' = \frac{1}{1+(2x^2)^2} \cdot 4x = \frac{4x}{1+4x^4}$$

При $x_0 = 1$ получим

$$y'(1) = \frac{4 \cdot 1}{1+4 \cdot 1^2} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

и) $y = \frac{x^3}{\ln^3 x}$

По правилу дифференцирования дроби имеем (с учетом того, что $\ln^3 x$ - сложная функция.

$$y' = \frac{(x^3)' \ln^3 x - x^3 \cdot (\ln^3 x)' \cdot (\ln x)'}{(\ln^3 x)^2} = \frac{3x^2 \ln^3 x - x^3 \cdot 3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^6 x} =$$

$$= \frac{3x^2 \ln^3 x - 3x^2 \ln^2 x}{\ln^6 x} = \frac{3x^2 \ln^2 x\,(\ln x - 1)}{\ln^6 x} = \frac{3x^2(\ln x - 1)}{\ln^4 x}$$

При $x_0 = e^2$ получим:

$$y'(e^2) = \frac{3(e^2)^2(\ln e^2 - 1)}{(\ln e^2)^4} = \frac{3e^4(2-1)}{2^4} = \frac{3e^4}{16}.$$

к) $y = \frac{3x^2 - 7}{\sqrt{2x-3}}$

По правилу дифференцирования сложной функции, с учетом того, что $\sqrt{2x-3}$ - сложная функция, получим:

$$y' = \frac{(3x^2-7)'\sqrt{2x-3} - (3x^2-7)(\sqrt{2x-3})' \cdot (2x-3)'}{(\sqrt{2x-3})^2} = \frac{6x\sqrt{2x-3} - (3x^2-7) \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x-3}} \cdot 2}{2x-3}$$

$$= \frac{6x\sqrt{2x-3} - \frac{3x^2-7}{\sqrt{2x-3}}}{2x-3} = \frac{\frac{6x(2x-3)-(3x^2-7)}{\sqrt{2x-3}}}{2x-3} = \frac{6x^2 - 18x - 3x^2 + 7}{(2x-3)\sqrt{2x-3}} =$$

$$= \frac{3x^2 - 18x + 7}{\sqrt{(2x-3)^3}}$$

При $x_0 = 2$ получим.

$$y'(2)=\frac{3\cdot 4-18\cdot 2+7}{\sqrt{(2\cdot 2-3)^3}}=\frac{12-36+7}{1}=-17$$

л) $y' \geq 0$, если $y=\frac{x^2+6x}{2-x}$

Найдем производную функции:

$$y'=\frac{(x^2+6x)'(2-x)-(x^2+6x)\cdot(2-x)'}{(2-x)^2}=\frac{(2x+6)(2-x)+(x^2+6x)}{(2-x)^2}=\frac{4x-2x^2+12-6x+x^2+6x}{(2-x)^2}=$$

$$=\frac{-x^2+4x+12}{(2-x)^2}$$

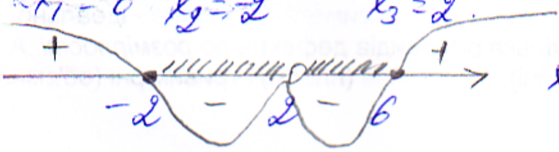
С учетом, что $y' \geq 0$, получим

$$\frac{-x^2+4x+12}{(2-x)^2} \geq 0$$

$\frac{x^2-4x-12}{(2-x)^2} \leq 0$. Найдем корни числителя и знаменателя.

$x^2-4x-12=0$ $\qquad$ $2-x=0$

$x_1=6$ $\quad x_2=-2$ $\qquad x_3=2$



$x \in [-2;2) \cup (2;6]$

Наибольшим целым решением из этого промежутка является $x=6$.

и) Решить неравенство $f'(x) < g'(x)$, если $f(x)=\frac{x^4+3}{3x}$, $g(x)=\frac{1+4x^2}{x}$

Найдем производные $f'(x)$ и $g'(x)$:

$$f'(x)=\frac{(x^4+3)'\cdot 3x-(x^4+3)\cdot(3x)'}{(3x)^2}=\frac{4x^3\cdot 3x-(x^4+3)\cdot 3}{9x^2}=\frac{12x^4-3x^4-9}{9x^2}=$$

$$=\frac{9x^4-9}{9x^2}=\frac{9(x^4-1)}{9x^2}=\frac{x^4-1}{x^2}$$

$$g'(x)=\frac{(1+4x^2)'\cdot x-(1+4x^2)\cdot x'}{x^2}=\frac{8x\cdot x-1-4x^2}{x^2}=\frac{4x^2-1}{x^2}$$

Т.к. $f'(x) < g'(x)$, то:

$$\frac{x^4-1}{x^2} < \frac{4x^2-1}{x^2}$$

$$\frac{x^4-1}{x^2} - \frac{4x^2-1}{x^2} < 0.$$

$$\frac{x^4-1-(4x^2-1)}{x^2} < 0$$

$$\frac{x^4-1-4x^2+1}{x^2} < 0$$

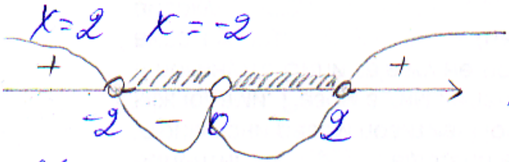
$$\frac{x^4-4x^2}{x^2} < 0$$

$$\frac{x^2(x^2-4)}{x^2}<0$$

$x^2-4<0;\ x\neq 0.$

$(x-2)(x+2)<0;\ x\neq 0.$

$x=2 \quad x=-2$



$x \in (-2;0) \cup (0;2)$

Наибольшим целым решением из этого промежутка является $x=1$.

② Уравнение касательной к графику функции.

а) Написать уравнение касательной в заданой точке:

1) $y=x^3-5x;\ x_0=2$ 2) $y=\sqrt{5x-x^2-3};\ x_0=1$ 3) $y=tg2x;\ x_0=\frac{\pi}{8}$

б) Написать уравнение касательной к графику функции $y=x^2-4x+6$ параллельной прямой $y=4x+7$

в) Найти площадь треугольника, образованного осями координат y и касательной к графику $y=\frac{x+3}{x-2}$ в точке с абсциссой $x_0=3$.

Решение.

а) 1. Уравнение касательной имеет вид $y=y_0+f'(x_0)(x-x_0)$

Вычислим $y_0, f'(x_0)$

$y_0=f(x_0)=2^3-5\cdot 2=8-10=-2$

$f'(x)=3x^2-5;\ f'(x_0)=3\cdot 2^2-5=12-5=7$

Итого получим: $y=-2+7(x-2)=-2+7x-14=7x-16.$

Ответ: $y=7x-16.$

2. Уравнение касательной имеет вид $y=y_0+f'(x_0)(x-x_0)$

Найдем $y_0; f'(x_0)$

$y_0=f(x_0)=\sqrt{5\cdot 1-1^2-3}=\sqrt{1}=1.$

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{5x-x^2-3}}\cdot(5x-x^2-3)'=\frac{5-2x}{2\sqrt{5x-x^2-3}}$

$f'(x_0)=\frac{5-2\cdot 1}{2\sqrt{5\cdot 1-1^2-3}}=\frac{3}{2\cdot 1}=1{,}5$

Окончательно получим:

$y = 1 + 1{,}5(x-1) = 1 + 1{,}5x - 3 = 1{,}5x - 2.$

Ответ: $y = 1{,}5x - 2$

3. Уравнение касательной имеет вид $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$
Найдем y_0 и $f'(x_0)$

$y_0 = f(x_0) = tg\,2\cdot\frac{\pi}{8} = tg\,\frac{\pi}{4} = 1.$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 2x}\cdot(2x)' = \frac{2}{\cos^2 2x}$$

$$y'(x_0) = \frac{2}{\cos^2\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{2}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4.$$

Окончательно получим:

$$y = 1 + 4\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = 1 + 4x - \frac{\pi}{2} = 4x + \frac{2-\pi}{2}$$

б) Уравнение касательной имеет вид $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$
$f'(x_0)$ - угловой коэффициент касательной. Как известно, если прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны, то $k_1 = k_2$. Значит $f'(x_0) = 4$ (поскольку касательная параллельна $y = 4x + 7$). Отсюда следует:

$y' = 2x - 4, \quad f'(x_0) = 4.$

$2x_0 - 4 = 4; \quad 2x_0 = 8 \quad x_0 = 4.$

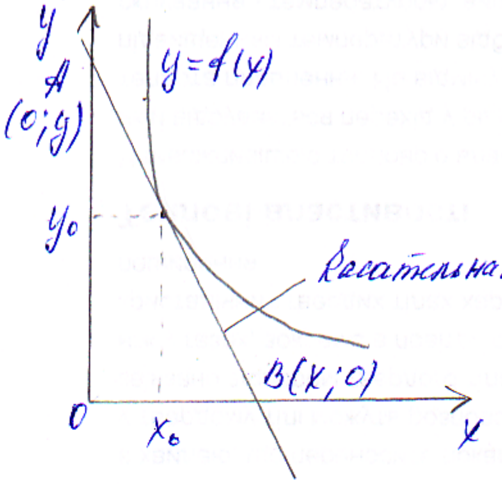
Найдем y_0: $y_0 = f(x_0) = 4^2 - 4\cdot4 + 6 = 6.$

Окончательно получим:

$y = 6 + 4(x-4) = 6 + 4x - 16 = 4x - 10$

Ответ: $y = 4x - 10.$

в) Сделаем схематический чертеж:



Требуется вычислить площадь треугольника AOB. Т.к. $\triangle AOB$ - прямоугольный, то

$S = \frac{1}{2} AO\cdot BO$

Т.к. $AO = x$, а $BO = y$, то $S = \frac{1}{2}xy$, где x, y - координаты точки пересечения касательной и осей координат.

Найдем уравнение касательной $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$

$$f'(x) = \frac{(x+3)'(x-2)-(x+3)(x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{x-2-(x+3)}{(x-2)^2} = \frac{x-2-x-3}{(x-2)^2} = -\frac{5}{(x-2)^2}$$

$$f'(x_0) = -\frac{5}{(3-2)^2} = -\frac{5}{1} = -5$$

$$y_0 = f(x_0) = \frac{3+3}{3-2} = \frac{6}{1} = 6$$

$$y = 6 - 5(x-3) = 6 - 5x + 15 = 21 - 5x.$$

Найдем точки пересечения касательной с осями координат:

Ox: $y=0$	Oy: $x=0$
$21-5x=0$	$y=21-5\cdot 0$
$5x=21$	$y=21$
$x=4{,}2$	$A(0;21)$
$B(4{,}2;0)$	

Искомая площадь равна: $S = \frac{1}{2}\cdot 4{,}2\cdot 21 = 44{,}1$ кв. ед.

③ Возрастание и убывание функции. Экстремумы.

Найти максимумы функций:

а) $y = x^4 - 2x^2 + 3$ б) $y = \frac{x^2-5x}{x+4}$ в) $y = \sqrt{x^2+2x}$.

Решение.

а) $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

Найдем критические точки функции $y'=0$

$y' = 4x^3 - 4x$; $y'=0$

$4x^3 - 4x = 0$

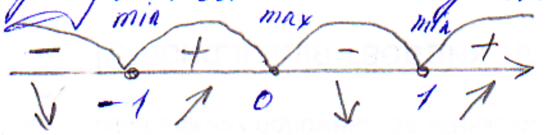
$4x(x^2-1)=0$

$4x=0$ $x^2-1=0$

$x_1=0$ $x^2=1$

$x_2=1$ $x_3=-1$.

Отметим эти точки на числовой оси и проверим знак производной в каждом из полученных промежутков.



Функция возрастает: $x \in (-1;0) \cup (1;+\infty)$

Функция убывает: $x \in (-\infty;-1) \cup (0;1)$

Точки минимума $x=-1$; $x=1$.

Точка максимума $x=0$

Найдем максимум функции:

$y(0)=0^4-2\cdot 0^2+3=3$. $(0;3)$ – max

Ответ: $y=3$.

б) $y=\dfrac{x^2-5x}{x+4}$

Найдем ОДЗ функции: $x+4\neq 0$; $x=-4$: $x\in(-\infty;-4)\cup(-4;+\infty)$

Найдем критические точки функции

$$y'=\frac{(x^2-5x)'(x+4)-(x^2-5x)\cdot(x+4)'}{(x+4)^2}=\frac{(2x-5)(x+4)-(x^2-5x)}{(x+4)^2}=$$

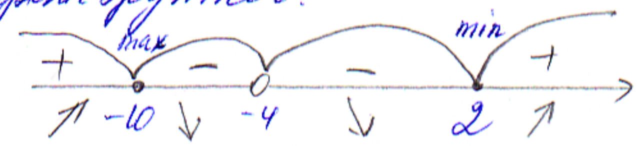
$$=\frac{2x^2+8x-5x-20-x^2+5x}{(x+4)^2}=\frac{x^2+8x-20}{(x+4)^2}$$

$y'=0 \Rightarrow \dfrac{x^2+8x-20}{(x+4)^2}=0$. Т.к. $x+4\neq 0$, то:

$x^2+8x-20=0$

$x_1=-10$ $x_2=2$

Отметим критические точки, а также значение $x=-4$ (в нем производная не существует) на числовой оси. Проверим знак производной в каждом из полученных промежутков.



Функция возрастает: $x\in(-\infty;-10)\cup(2;+\infty)$

Функция убывает $x\in(-10;-4)\cup(-4;2)$

Точка максимума: $x=-10$ Точка минимума $x=2$

Найдем максимум функции:

$$y(-10)=\frac{(-10)^2-5\cdot(-10)}{-10+4}=\frac{100+50}{-6}=-25;\quad (-10;-25)\text{ – max}.$$

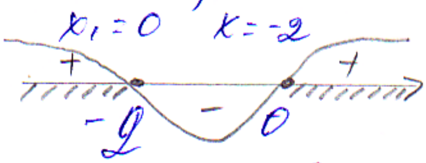
Ответ: $y=-25$.

в) $y=\sqrt{x^2+2x}$

Найдем ОДЗ функции: $x^2+2x\geq 0$

$x(x+2)\geq 0$

$x_1=0$ $x=-2$



ОДЗ: $x\in(-\infty;-2]\cup[0;+\infty)$

Найдем критическую точку функции

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+2x}}\cdot(x^2+2x)'=\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}}=\frac{(x+1)2}{2\sqrt{x^2+2x}}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$$

$y'=0 \Rightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}=0$. Т.к. $\sqrt{x^2+2x}\neq 0 \Rightarrow x\neq 0;\ x\neq -2$, то

$x+1=0$

$x=-1 \notin (-\infty;-2]\cup[0;+\infty)$

Критических точек (а значит и экстремумов) нет.

(4) Наименьшее и наибольшее значение функции:

а) Найти (наименьшее и) наибольшее значение функции на указанном промежутке.

1) $y=1-3x^2-x^3;\ [-1;2]$ 2) $y=\frac{x^2+5}{x-2};[3;6]$

3) $y=\cos 2x+2\sin x;\ [0;\pi]$

б) Представить число 60 в виде суммы двух положительных чисел, так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

в) В равнобедренный треугольник с углом α при основании вписана окружность радиуса r. При каком значении α площадь треугольника будет наименьшей.

Решение.

а) 1. $y=1-3x^2-x^3;\ [-1;2]$

Найдем критические точки функции.

$y'=6x-3x^2;\ y'=0$

$6x-3x^2=0$

$3x(2-x)=0$

$3x=0$ $\qquad$ $2-x=0$

$x_1=0\in[-1;2]$ $\qquad$ $x=2\in[-1;2]$

Найдем значения функции в критических точках и на концах данного промежутка.

$y(0)=1-3\cdot 0^2-0^3=1.$

$y(-1)=1-3\cdot(-1)^2-(-1)^3=1-3+1=-1.$

$y(2)=1-3\cdot 2^2-2^3=1-12-8=-19.$

Из найденных значений выберем наибольшее: $y_{m}=1$

Ответ: $y_{max}=1$.

2. $y = \frac{x^2+5}{x-2}$

Найдем ОДЗ функции $x-2 \neq 0; x \neq 2 \notin [3;6]$.

Найдем критические точки функции:

$$y' = \frac{(x^2+5)'(x-2)-(x^2+5)(x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{2x(x-2)-(x^2+5)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-4x-x^2-5}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}$$

$y'=0$: $\frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}=0$; Т.к. $x-2 \neq 0$, то

$x^2-4x-5=0$

$x_1 = 5 \in [3;6]$

$x_2 = -1 \notin [3;6]$

Найдем значения функции в критических точках, входящих в промежуток, а также на его концах.

$y(5) = \frac{5^2+5}{5-2} = \frac{30}{3} = 10$

$y(3) = \frac{3^2+5}{3-2} = 14$

$y(6) = \frac{6^2+5}{6-2} = \frac{41}{4} = 10\frac{1}{4}$

Из найденных значений выберем наибольшее: $y_{max} = 14$

Ответ: $y_{max} = 14$.

3. $y = \cos 2x + 2\sin x$; $[0;\pi]$

Найдем критические точки функции.

$y' = -\sin 2x \cdot 2 + 2\cos x = -2\sin 2x + 2\cos x$

$y'=0$: $2\cos x - 2\sin 2x = 0$, По формуле синуса двойного угла:

$2\cos x - 2\sin x \cos x = 0$

$2\cos x(1-\sin x) = 0$

$2\cos x = 0$ или $1-\sin x = 0$

$x_1 = \frac{\pi}{2} + \cancel{\pi} k\pi$. $\quad \sin x = 1$

$x_2 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$

Заметим, что серии решений совпадают, поэтому $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Из этой серии промежутку $[0;\pi]$ принадлежит только значение $x = \frac{\pi}{2}$. Найдем значения функции в критических точках и на концах промежутка

$y(0)=\cos 2\cdot 0+2\cdot \sin 0=1$

$y(\frac{\pi}{2})=\cos 2\cdot\frac{\pi}{2}+2\sin\frac{\pi}{2}=\cos\pi+2\sin\frac{\pi}{2}=-1+2=1.$

$y(\pi)=\cos 2\pi+2\sin\pi=1.$

$y_{max}=1$ (т. к. все значения совпадают)

б) Пусть одно из слагаемых будет равно x, а второе $-(60-x)$ (т.к. их сумма равна 60). Поскольку требуется найти наименьшее значение суммы их квадратов, то получим следующее выражение $y=x^2+(60-x)^2=x^2+3600-120x+x^2=$
$=2x^2-120x+3600.$

Найдем наименьшее значение данной функции, с учетом, что $x\in[0;60]$

$y'=4x-120$

$y'=0:\ 4x-120=0$

$4x=120$

$x=30$

$y(30)=2\cdot 30^2-120\cdot 30+3600=1800-3600+3600=1800.$

$y(0)=3600$

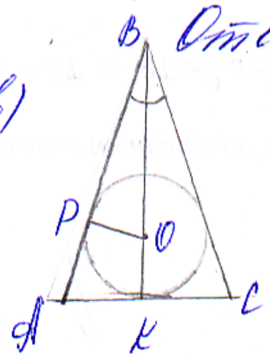
$y(60)=2\cdot 60^2-120\cdot 60+3600=7200-7200+3600$

Наименьшее значение сумма квадратов принимает при $x=30$

Значит, оба слагаемых равны друг другу и равны 30.

Ответ: $x_1=x_2=30$

в)



Дано: $\triangle ABC$ – равнобедренный; вписана окружность $\angle ABC=\alpha$; $OP=OK=r$; $S=S_{min}$.

Найти: α_{min} – ?

Решение

$\cancel{S=2S}$ $r=\frac{2S}{P}\Rightarrow S=\frac{Pr}{2}$, где P – периметр $\triangle ABC$.

$P=2AB+AC$

1) $\triangle BOP$ – прямоугольный: $\angle PBO=\frac{\alpha}{2}$ (т. к. BK – высота и биссектриса $\triangle ABC$); $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{OP}{OB}\Rightarrow OB=\frac{OP}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

$BK=OB+OK=\frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}+r=\frac{r+r\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{r(1+\sin\frac{\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

2) $\triangle ABK$ – прямоугольный:

$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{AK}{BK}\Rightarrow AK=BK\,tg\frac{\alpha}{2}=\frac{r(1+\sin\frac{\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{r(1+\sin\frac{\alpha}{2})}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

$AC=2AK=\frac{2r(1+\sin\frac{\alpha}{2})}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{BK}{AB}\Rightarrow AB=\frac{BK}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\frac{r(1+\sin\frac{\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{r(1+\sin\frac{\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{2r(1+\sin\frac{\alpha}{2})}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2r(1+\sin\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha}$$

Найдем периметр:

$$P=2AB+AC=\frac{4r(1+\sin\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha}+\frac{2r(1+\sin\frac{\alpha}{2})}{\cos\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=2r(1+\sin\frac{\alpha}{2})\left(\frac{2}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)=2r(1+\sin\frac{\alpha}{2})\left(\frac{2}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)=$$

$$=2r(1+\sin\frac{\alpha}{2})\frac{2+2\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=2r(1+\sin\frac{\alpha}{2})\cdot\frac{2(1+\sin\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha}=$$

$$=\frac{4r(1+\sin\frac{\alpha}{2})^2}{\sin\alpha}$$

Найдем площадь ΔABC:

$$S=\frac{1}{2}r\cdot P=\frac{1}{2}r\cdot\frac{4r(1+\sin\frac{\alpha}{2})^2}{\sin\alpha}=\frac{2r^2(1+\sin\frac{\alpha}{2})^2}{\sin\alpha}$$

Найдем критические точки функции $S(\alpha)$

$$S'(\alpha)=\frac{((1+\sin\frac{\alpha}{2})^2)'\sin\alpha-(1+\sin\frac{\alpha}{2})^2\cdot(\sin\alpha)'}{\sin^2\alpha}\cdot 2r^2=$$

$$=\frac{(2(1+\sin\frac{\alpha}{2})\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{2})\sin\alpha-(1+\sin\frac{\alpha}{2})^2\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\cdot 2r^2=$$

$$=\frac{(1+\sin\frac{\alpha}{2})\cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha-(1+\sin\frac{\alpha}{2})^2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\cdot 2r^2=\frac{(1+\sin\frac{\alpha}{2})(\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha-\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2})}{\sin^2\alpha}\cdot 2r^2$$

$$=\frac{(1+\sin\frac{\alpha}{2})((\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2})-\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}\cdot 2r^2=\frac{(1+\sin\frac{\alpha}{2})(\sin(\alpha-\frac{\alpha}{2})-\cos\alpha)\cdot 2r^2}{\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{(1+\sin\frac{\alpha}{2})(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}\cdot 2r^2.$$

$S'(\alpha)=0$; $\sin\alpha\neq 0$; $\alpha=\kappa\pi.$; $2r^2\neq 0$ (по условию)

$$(1+\sin\frac{\alpha}{2})(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha)=0$$

$1+\sin\frac{\alpha}{2}=0$

$\sin\frac{\alpha}{2}=-1$

$\frac{\alpha}{2}=-\frac{\pi}{2}+2n\pi$

$\alpha=-\pi+2n\pi$ (не удовлетворяет условию задачи: $0<\alpha<\pi$)

$\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha = 0$

$\sin\frac{\alpha}{2} - \cos 2\cdot\frac{\alpha}{2} = 0.$

$\sin\frac{\alpha}{2} - 1 + 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 0.$

Введем новую неизвестную $\sin\frac{\alpha}{2} = y$:

$2y^2 + y - 1 = 0$

$D = 1 - 4\cdot(-1)\cdot 2 = 9; \sqrt{D} = 3.$

$y_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \quad y_2 = \frac{-1-3}{4} = -1$

Вернемся к замене:

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ или $\sin\frac{\alpha}{2} = -1.$

$\frac{\alpha}{2} = (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi \quad \frac{\alpha}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$

$\alpha = (-1)^k\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \alpha = -\pi + 4n\pi$ (не подходит, т.к. $0 < \alpha < \pi$.)

Промежутку $0 < \alpha < \pi$ из серии $x = (-1)^k\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ удовлетворяет только значение $\alpha = \frac{\pi}{3} = 60°$ при $k = 0$.

$S\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2r^2\left(1+\sin\frac{\pi}{6}\right)^2}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2r^2\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4r^2\frac{9}{4}}{\sqrt{3}} = \cancel{12r}\frac{9r^2}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}r^2$

Задачи для самостоятельного решения.

① Вычисление производных

Найти производную функции и ее значение в заданной точке

а) $y = 4x - x^3 + 2$; $x_0 = 2$

б) $y = x^2 - 9x^4 + 1$; $x_0 = -1$.

в) $y = x^3 - 12\sqrt{x}$; $x_0 = 4$

г) $y = \frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^5}$; $x_0 = 1$.

д) $y = (2x-3)\sqrt{x}$; $x_0 = 9$

е) $y = (x^2 - 2x + 3)\sin x$; $x_0 = 0$

ж) $y = (3x^2 - 7x + 2)(1 - 5x^2 - 2x)$; $x_0 = -1$

з) $y = \frac{2x^2 - 3x - 1}{x+1}$; $x_0 = 1$

и) $y = \frac{x^4 + 5}{x^4 - 5}$; $x_0 = -1$

к) $y = \frac{2\sqrt{x}}{2 - x}$; $x_0 = 1$.

л) $y = 6^{3x^2 - 4x + 1} \cdot \frac{1}{\ln 6}$; $x_0 = -2$

м) $y = (x^2 - 2x + 6)^4$; $x_0 = 2$

н) $y = \sqrt[4]{3 - 2x^2}$; $x_0 = -1$

о) $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$; $x_0 = \frac{\pi}{4}$

п) $y = \arcsin(\sqrt{1 - 4x})$; $x_0 = -2$

р) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{1 + x^2}$; $x_0 = \sqrt{3}$.

с) Решить неравенство $y' \geq 0$, если:

1) $y = \frac{3x - 1}{1 - 4x}$ 2) $y = 2x^2 - 2x^3 - x^4 + 5$

т) Решить неравенство $f'(x) > g'(x)$, если

$f(x) = \frac{9x^2 + 1}{x}$ $g(x) = \frac{x^4 + 3}{3x}$

② Уравнение касательной.

а) Написать уравнение касательной к графику функции в заданной точке.

1) $y = 4x - \frac{1}{3}x^3$; $x_0 = 3$

2) $y = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4$, $x_0 = 2$

3) $y = xe^x$; $x_0 = 1$

4) $y = \cos^2 x$; $x_0 = \frac{\pi}{2}$

5) $y = \sqrt{2x - 3}$; $x_0 = 2$

б) Написать уравнение касательной к графику функции $y = 0{,}3x^2 + 2x - 7$ параллельной прямой $y = 0{,}8x - 5$

в) Написать уравнение касательной к графику функции $y = \frac{x^3}{3} - \frac{9}{8}x^2 + x + \sqrt{5}$ параллельной прямой $y = \frac{1}{2}x + 3$.

г) Вычислить площадь треугольника, образованного касательной к графику функции $y=x^3+x^2-2x+3$ в точке $x_0=-1$ и осями координат

д) Вычислить площадь треугольника, образованного касательной к графику функции $y=\frac{x+2}{x-1}$ в точке $x_0=2$ и осями координат.

③ Возрастание и убывание функции, экстремумы.

Найти максимумы функций

а) $y=x^3+3x-2$

б) $y=2x^2-x^4+1$.

в) $y=\frac{x^2+7x}{x-9}$

г) $y=\frac{x^2+6x}{x-2}$

д) $y=\frac{x+2}{x^2+5}$

е) $y=\sqrt{8x-x^2}$

④ Наименьшее и наибольшее значения функции.

а) Найти наименьшее значение функции на указанном промежутке

1) $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-12x+4;\ [0;6]$

2) $y=x^5-5x^4+30;\ [-2;1]$

3) $y=\frac{x^2-3x}{x-4};\ [-1;3]$

4) $y=\frac{x^2-8x}{x+1};\ [-5;-2]$

5) $y=3\sin x-\sin 3x;\ [0;\pi]$

6) $y=\frac{1}{2}\sin 2x+\sin x;\ [0;\frac{3}{2}\pi]$

б) Число 36 представить в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы произведение их было наибольшим.

в) Найти число, которое в сумме со своим квадратом дает этой сумме наименьшее значение

г) Прямоугольный участок земли площадью 4га, одна из сторон которого примыкает к реке, огораживается по суше забором. Каковы должны быть размеры участка, чтобы периметр забора был наименьшим?

д) Большее основание равнобедренной трапеции равно а, а острый угол – α. Диагональ трапеции перпендикулярна боковой стороне. При каком значении α площадь трапеции будет наибольшей