Тригонометрические уравнения.

Примеры решения задач.

1) Простейшие тригонометрические уравнения.

Решить уравнения. Указать в ответе число корней, принадлежащих данному промежутку.

а) $\cos\frac{x}{3}=\frac{1}{2}$ $\quad [-\frac{\pi}{2};\pi]$

б) $tg(2x-\frac{\pi}{4})=0$; $\quad [-\pi;\frac{2}{3}\pi]$

в) $\sin(\frac{\pi}{3}-x)=-\frac{1}{2}$ $\quad [0;\frac{7}{6}\pi]$

г) $(tg\,x-\sqrt{3})(2\sin x+1)=0$; $\quad [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

Решение

а) $\cos\frac{x}{3}=\frac{1}{2}$

По общей формуле корней уравнения $\cos x=a$ имеем:

$\frac{x}{3}=\pm\arccos\frac{1}{2}+2k\pi.$

$\frac{x}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi.$

$x=\pm\pi+6k\pi. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\pi+6k\pi; \\ x_2=-\pi+6k\pi; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x_1=\pi(6k+1) \\ x_2=\pi(6k-1) \end{array}\right.$

Проверим, какие из найденных корней принадлежат промежутку $[-\frac{\pi}{2};\pi]$. Для этого будем придавать k разные целочисленные значения: $k=0;\pm1;\pm2;\ldots$

$k=0$: $\quad x_1=\pi\cdot(6\cdot0+1)=\pi\in[-\frac{\pi}{2};\pi]$

$\quad x_2=\pi(6\cdot0-1)=-\pi\notin[-\frac{\pi}{2};\pi]$

$k=1$: $\quad x_1=\pi\cdot(6\cdot1+1)=7\pi\notin[-\frac{\pi}{2};\pi]$

$\quad x_2=\pi(6\cdot1-1)=5\pi\notin[\frac{\pi}{2};\pi]$

$k=-1$: $\quad x_1=\pi\cdot(6\cdot(-1)+1)=-5\pi\notin[-\frac{\pi}{2};\pi]$

$\quad x_2=\pi(6\cdot(-1)-1)=-7\pi\notin[-\frac{\pi}{2};\pi]$

Проверка для $k>1$ и $k<-1$ уже не имеет смысла

Ответ: 1 корень.

б) $tg(2x-\frac{\pi}{4})=0$

Мы имеем дело с частным случаем уравнения $tgx=a$ – $tgx=0$. Получим:

$2x-\frac{\pi}{4}=k\pi.$

$2x=\frac{\pi}{4}+k\pi.$

$x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$

Проверим, какие корни из этой серии принадлежат промежутку $[-\pi;\frac{2}{3}\pi]$:

$k=0$: $x=\frac{\pi}{8}+\frac{0\cdot\pi}{2}=\frac{\pi}{8}\in[-\pi;\frac{2}{3}\pi]$

$k=1$: $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{8}+\frac{4}{8}\pi=\frac{5}{8}\pi\in[-\pi;\frac{2}{3}\pi]$

$k=-1$; $x=\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{8}-\frac{4}{8}\pi=-\frac{3}{8}\pi\in[-\pi;\frac{2}{3}\pi]$

$k=2$: $x=\frac{\pi}{8}+\pi=\frac{9}{8}\pi\notin[-\pi;\frac{2}{3}\pi]$

$k=-2$: $x=\frac{\pi}{8}-\pi=-\frac{7}{8}\pi\in[-\pi;\frac{2}{3}\pi]$

$k=-3$: $x=\frac{\pi}{8}-\frac{3}{2}\pi=-\frac{11}{8}\pi\notin[-\pi;\frac{2}{3}\pi]$

Ответ: 4 корня.

в) $sin(\frac{\pi}{3}-x)=-\frac{1}{2}$

По общей формуле корней уравнения $sinx=a$ имеем:

$\frac{\pi}{3}-x=(-1)^k arcsin(-\frac{1}{2})+k\pi.$

$\frac{\pi}{3}-x=(-1)^k\cdot(-1)arcsin\frac{1}{2}+k\pi$

$\frac{\pi}{3}-x=(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{6}+k\pi.$

$-x=(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+k\pi.$

$x=(-1)^{k+2}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-k\pi.$

$x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-k\pi.$

Проверим, какие корни из этой серии принадлежат промежутку $[0;\frac{7}{6}\pi]$

$k=0$: $x=(-1)^0\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-0\pi=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}\in[0;\frac{7}{6}\pi]$

$k=1$: $x=(-1)^1\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-\pi=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-\pi=-\frac{5}{6}\pi\notin[0;\frac{7}{6}\pi]$

$k=-1$: $x=(-1)^{-1}\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+\pi=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{7}{6}\pi\in[0;\frac{7}{6}\pi]$

$k=-2$: $x=(-1)^{-2}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{5}{2}\pi\notin[0;\frac{7}{6}\pi]$

Ответ: 2 корня.

г) $(tgx-\sqrt{3})(2\sin x+1)=0$.

Т.к. произведение равно нулю при равенстве нулю хотя бы одного из множителей, то уравнение можно представить в виде совокупности двух уравнений.

$\left[\begin{array}{l} tgx-\sqrt{3}=0 \\ 2\sin x+1=0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} tgx=\sqrt{3} \\ \sin x=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$

По общим формулам корней тригонометрических уравнений получим:

$\left[\begin{array}{l} x_1=arctg\sqrt{3}+k\pi \\ x_2=(-1)^n\arcsin(-\frac{1}{2})+n\pi \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x_1=\frac{\pi}{3}+k\pi \\ x_2=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{2}+n\pi \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x_1=\frac{\pi}{3}+k\pi. \\ x_2=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+n\pi. \end{array}\right.$

Проверим, какие корни из найденных серий принадлежат промежутку $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$:

$k=0: x_1=\frac{\pi}{3}+0\pi=\frac{\pi}{3}\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ $n=0: x_2=(-1)^1\frac{\pi}{6}+0\pi=-\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

$k=1: x_1=\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4}{3}\pi\notin[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ $n=1: x_2=(-1)^2\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{7}{6}\pi\notin[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

$k=-1: x_1=\frac{\pi}{3}-\pi=-\frac{2}{3}\pi\notin[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ $n=-1: x_2=(-1)^0\frac{\pi}{6}-\pi=\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{5}{6}\pi\notin[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

Ответ: 2 корня.

② Уравнения, приводимые к квадратным

Решить уравнения. Указать наименьший положительный корень (в градусах).

а) $\sin^2x+\sin x=2$

б) $2\cos^2x+5\sin x=4$

в) $tgx-2ctgx+1=0$ (указать наименьший целый положительный корень)

г) $\cos 2x+3\sin x=2$

Решение.

а) $\sin^2x+\sin x=2$

Уравнение является квадратным относительно функции $\sin x$, поэтому введем новую неизвестную $y=\sin x$:

$y^2+y=2$

$y^2+y-2=0$

$y_1=-2$ $y_2=1$

Вернемся к старой неизвестной. Рассмотрим 2 случая:

1) $\sin x=-2$

Нет корней, т.к. $-1\le\sin x\le1$

2) $\sin x = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$

Найдем наименьший положительный корень:

$k=0: \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\cdot 0\cdot \pi = \frac{\pi}{2}; \quad x = 90°.$

б) $2\cos^2 x + 5\sin x = 4$

Т.к. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, то уравнение примет вид:

$2(1-\sin^2 x) + 5\sin x - 4 = 0$

$2 - 2\sin^2 x + 5\sin x - 4 = 0$

$-2\sin^2 x + 5\sin x - 2 = 0.$

$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0.$

Введем новую неизвестную $y = \sin x$:

$2y^2 - 5y + 2 = 0$

$D = 25 - 4\cdot 2\cdot 2 = 9; \sqrt{D} = 3.$

$y_1 = \frac{5+3}{4} = 2 \quad y_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Вернемся к старой неизвестной

1) $\sin x = 2$ - нет корней, т.к. $-1 \le \sin x \le 1$

2) $\sin x = \frac{1}{2}$

$x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + n\pi$

$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + n\pi.$

Найдем наименьший положительный корень:

$n = 0: x = (-1)^0 \cdot \frac{\pi}{6} + 0\cdot\pi = \frac{\pi}{6}. \quad x = 30°$

в) $tgx - 2ctgx + 1 = 0$

Т.к $ctgx = \frac{1}{tgx}$, то уравнение примет вид:

$tgx - \frac{2}{tgx} + 1 = 0$

Введем новую неизвестную $y = tgx$

$y - \frac{2}{y} + 1 = 0$

$y^2 + y - 2 = 0$

$y_1 = -2 \quad y_2 = 1.$

Вернемся к старой неизвестной:

1) $tgx = -2$

$x = arctg(-2) + k\pi$

$x_1 = -arctg2 + k\pi.$

2) $tg x = 1.$

$x = arctg 1 + n\pi.$

$x_2 = \frac{\pi}{4} + n\pi.$

Первая серия решений не дает целых корней, поэтому будем искать наименьшее целое положительное решение во второй серии:

$n = 0: \; x_2 = \frac{\pi}{4} + 0\pi = \frac{\pi}{4} \quad x_2 = 45^\circ.$

г) $\cos 2x + 3\sin x = 2$

Поскольку $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, то уравнение запишется так:

$1 - 2\sin^2 x + 3\sin x = 2$

$-2\sin^2 x + 3\sin x + 1 - 2 = 0$

$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$

Введем новую неизвестную $y = \sin x$

$2y^2 - 3y + 1 = 0$

$D = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1; \; \sqrt{D} = 1.$

$y_1 = \frac{3+1}{4} = 1 \qquad y_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$

Вернемся к старой неизвестной:

1) $\sin x = 1$

$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

2) $\sin x = \frac{1}{2}$

$x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + n\pi.$

$x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi.$

Найдем наименьший положительный корень

$k = 0: \; x_1 = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot 0 \cdot \pi$

$x_1 = \frac{\pi}{2}$

$x_1 = 90^\circ$

$n = 0: \; x_2 = (-1)^0 \cdot \frac{\pi}{6} + 0 \cdot \pi$

$x_2 = \frac{\pi}{6}$

$x_2 = 30^\circ$

Наименьшим целым положительным корнем является $x = 30^\circ.$

3) Однороднородные уравнения.

Решить уравнения. Указать наибольший целый отрицательный корень (в градусах)

а) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0.$

б) $2\sin^2 x + 3\sin x \cos x + \cos^2 x = 0.$

в) $5\sin^2 x + 3\sin x \cos x + 4\cos^2 x = 3$

г) $4\sin^2 x + \sin 2x = 3.$

Решение.

а) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0.$

Уравнение является однородным, т.к. представляет собой сумму одночленов первой степени, равную нулю. Разделим его на $\cos x \neq 0$. (т.к. $\sin x$ и $\cos x$ не могут одновременно равняться нулю).

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sqrt{3}\cos x}{\cos x} = 0$$

$$tg x + \sqrt{3} = 0$$

$$tg x = -\sqrt{3}$$

$$x = arctg(-\sqrt{3}) + k\pi$$

$$x = -arctg\sqrt{3} + k\pi.$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Найдем наибольший отрицательной корень.

$k=0 \quad x = -\frac{\pi}{3} + 0\cdot\pi = -\frac{\pi}{3} \qquad x = -60^\circ.$

б) $2\sin^2 x + 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 0.$

Уравнение является однородным, поскольку содержит сумму одночленов второй степени, равную нулю. Разделим уравнение на $\cos^2 x \neq 0$. Получим:

$$\frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{3\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0.$$

$$2tg^2 x + 3tg x + 1 = 0.$$

Введем новую неизвестную $y = tg x$

$$2y^2 + 3y + 1 = 0.$$

$$D = 9 - 4\cdot 2\cdot 1 = 1. \quad \sqrt{D} = 1.$$

$$y_1 = \frac{3+1}{4} = 1 \qquad y_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Вернемся к старой неизвестной

1) $tg x = 1$

$x = arctg 1 + k\pi$

$x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi.$

2) $tg x = \frac{1}{2}$

$x_2 = arctg\frac{1}{2} + n\pi.$

Вторая серия решений целых корней не дает. Найдем наименьший отрицательный целый корень из первой серии:

$k=0: \; x_1 = \frac{\pi}{4} + 0\cdot\pi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x_1 = 45^\circ$ (не подходит)

$k=-1: \; x_1 = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3}{4}\pi \Rightarrow x_1 = -135^\circ.$

в) $5\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 3.$

Уравнение однородным не является, т.к. сумма одночленов одной степени не равна нулю. Но оно сводится к однородному, если представить правую часть как $3\cdot 1 = 3(\sin^2 x + \cos^2 x) = 3\sin^2 x + 3\cos^2 x$. С учетом этого получим:

$5\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 3\sin^2 x + 3\cos^2 x$

$5\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 4\cos^2 x - 3\sin^2 x - 3\cos^2 x = 0$

$2\sin^2 x + 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$. Разделим на $\cos^2 x \neq 0$.

$$\frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{3\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$2tg^2 x + 3tg x + 1 = 0.$

Введем новую неизвестную $y = tg x$

$2y^2 + 3y + 1 = 0$

$y_1 = 1 \quad y_2 = \frac{1}{2}$

Вернемся к старой неизвестной

1) $tg x = 1$ $\qquad$ 2) $tg x = \frac{1}{2}$

$x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi \qquad x_2 = arctg\frac{1}{2} + n\pi.$

Вторая серия целых корней не дает. Найдем целые отрицательные корни из первой серии.

$k = -1: \; x_1 = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3}{4}\pi; \; x_1 = -135^\circ.$

г) $4\sin^2 x + \sin 2x = 3.$

Уравнение не является однородным, но сводится к такову. Учтем, что $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ и $3 = 3\cos^2 x + 3\sin^2 x$:

$4\sin^2 x + 2\sin x\cos x = 3\sin^2 x + 3\cos^2 x$

$4\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\sin^2 x - 3\cos^2 x = 0.$

$\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$. Разделим на $\cos^2 x \neq 0.$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x} - \frac{3\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$tg^2 x + 2tg x - 3 = 0.$

Введем новую неизвестную $y = tg x$

$y^2 + 2y - 3 = 0$

$y_1 = -3 \quad y_2 = 1.$

Вернемся к замене:

1) $tg x = -3$
$x = arctg(-3) + n\pi$
$x_1 = -arctg 3 + n\pi$.

2) $tg x = 1$
$x = arctg 1 + k\pi$
$x_2 = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Первая серия решений не дает целых корней. Найдем наибольший отрицательный корень из второй серии.

$k = -1$: $x_2 = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3}{4}\pi$; $x = -135°$.

④ Линейные уравнения и уравнения, приводящиеся к ним.

а) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$
б) $2\sin x - 3\cos x = 2$
в) $\sin 2x - \cos x - \sin x = 1$.

Решение.

а) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$.

Обозначим $\sqrt{3}$ как $tg\varphi$: $tg\varphi = \sqrt{3}$. Тогда $\varphi = \frac{\pi}{3}$

Уравнение примет вид:

$tg\frac{\pi}{3}\sin x + \cos x = 1$.

$\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\sin x + \cos x = 1 \;|\cdot \cos\frac{\pi}{3}$

$\sin\frac{\pi}{3}\sin x + \cos\frac{\pi}{3}\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$

$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$x - \frac{\pi}{3} = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2k\pi$.

$x - \frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

$x = \pm\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

Ответ лучше привести в виде совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x_2 = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. ; \quad \begin{array}{l} x_1 = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \\ x_2 = 2k\pi. \end{array}$$

б) $2\sin x - 3\cos x = 2$.

Можно решить методом, рассмотренным ранее, но это приведет к довольно громоздким выкладкам. Лучше привести данное уравнение к однородному, хоть это и более трудоемкий процесс.

Обозначим $\sin x$ как $\sin 2\cdot\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, а $\cos x$ как $\cos 2\cdot\frac{x}{2}=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$. С учетом того, что $2=2\sin^2\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}$ уравнение примет вид:

$$2\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-3\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=2\sin^2\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}$$

$$4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-3\cos^2\frac{x}{2}+3\sin^2\frac{x}{2}-2\sin^2\frac{x}{2}-2\cos^2\frac{x}{2}=0.$$

$\sin^2\frac{x}{2}+4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-5\cos^2\frac{x}{2}=0$ Разделим на $\cos^2\frac{x}{2}\neq 0$

$$\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}-\frac{5\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}=0$$

$$tg^2\frac{x}{2}+4tg\frac{x}{2}-5=0.$$

Введем новую неизвестную: $y=tg\frac{x}{2}$

$y^2+4y-5=0.$

$y_1=-5 \quad y_2=1.$

Вернемся к замене:

1) $tg\frac{x}{2}=-5$

$\frac{x}{2}=arctg(-5)+k\pi.$

$\frac{x}{2}=-arctg5+k\pi.$

$x_1=-2arctg5+2k\pi.$

2) $tg\frac{x}{2}=1.$

$\frac{x}{2}=arctg1+n\pi$

$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+n\pi.$

$x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi n.$

в) $\sin 2x-\sin x-\cos x=1.$

Данное уравнение является симметрическим, т.к. при перемене местами $\sin x$ и $\cos x$ оно не поменяет вид. Запишем его в виде:

$2\sin x\cos x-(\sin x+\cos x)=1.$

Введем новую неизвестную: $\sin x+\cos x=y$. Найдем $2\sin x\cos x$. Для этого равенство $\sin x+\cos x=y$ возведем в квадрат:

$(\sin x+\cos x)^2=y^2$

$\sin^2x+2\sin x\cos x+\cos^2x=y^2$

$1+2\sin x\cos x=y^2$

$2\sin x\cos x=y^2-1$

$\sin x\cos x=\frac{y^2-1}{2}$

Уравнение примет вид:

$2 \cdot \frac{y^2-1}{2} - y = 1.$

$y^2 - 1 - y + 1 = 0.$

$y^2 - y = 0.$

$y(y-1) = 0.$

$y_1 = 0 \quad y_2 = 1.$

Вернемся к замене:

1) $\sin x + \cos x = 0.$

Это однородное уравнение 1-й степени. Делим на $\cos x \neq 0.$

$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x} = 0$

$tg x + 1 = 0$

$tg x = -1.$

$x = arctg(-1) + k\pi.$

$x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$

2) $\sin x + \cos x = 1.$

Это линейное уравнение. Положим $1 = tg\varphi$, откуда $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Получим:

$tg\frac{\pi}{4} \sin x + \cos x = 1.$

$\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} \sin x + \cos x = 1. \quad \Big| \cdot \cos\frac{\pi}{4}$

$\sin\frac{\pi}{4} \sin x + \cos x \cos\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$

$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x - \frac{\pi}{4} = \pm \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2n\pi.$

$x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2n\pi.$

$x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2n\pi \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_2 = 2n\pi \\ x_3 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \end{array}\right.$

5) Уравнения, решаемые разложением левой части на множители

а) $\cos 6x = \cos 2x$, указать решение, входящее в $[60°; 90°]$

б) $\sin 5x + \cos 3x = 0$, указать решение, входящее в $[120°; 150°]$

в) $\sin x + \sin 3x = \sin 2x$, указать решение, входящее в $[-45°; -60°]$

г) $\sin^2 2x + \sin^2 x = 1$, указать решение, входящее в $[-45°; -30°]$

д) $\cos x \cos 5x = \cos 4x \cos 2x$, указать решение, входящее в $[-90°; -60°]$

е) $\cos 3x - \sin x = \cos x - \sin 3x$, указать решение, входящее в $[10°; 30°]$

ж) $\sin 3x = \cos x \sin 2x$, указать решение, входящее в $[150°; 180°]$

Решение

а) $\cos 6x = \cos 2x$

$\cos 6x - \cos 2x = 0.$

По формуле разности косинусов получим:

$-2 \sin \frac{6x+2x}{2} \sin \frac{6x-2x}{2} = 0$

$-2 \sin 4x \sin 2x = 0.$

Уравнение распадется на два простейших уравнения:

$\sin 4x = 0$ или $\sin 2x = 0.$

$4x = k\pi$ $\qquad$ $2x = n\pi$

$x_1 = \frac{k\pi}{4}$ $\qquad$ $x_2 = \frac{n\pi}{2}$

Заметим, что если $k = 2n$, то решения совпадают.

Поэтому $x = \frac{k\pi}{4}$

Найдем решение, входящее в $[60°; 90°]$

$k=0$: $x = 0 \notin [60°; 90°]$

$k=1$: $x = \frac{\pi}{4} = 45° \notin [60°; 90°]$

$k=2$: $x = \frac{\pi}{2} = 90° \in [60°; 90°]$

Ответ: $x = 90°$.

б) $\sin 5x + \cos 3x = 0.$

По формулам приведения получим $\cos 3x = \sin(\frac{\pi}{2} - 3x)$. Уравнение примет вид

$\sin 5x + \sin(\frac{\pi}{2} - 3x) = 0.$

По формуле суммы синусов получим:

$2 \sin \frac{5x + \frac{\pi}{2} - 3x}{2} \cos \frac{5x - \frac{\pi}{2} + 3x}{2} = 0.$

$2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=0.$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$ или $\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=0.$

$x+\frac{\pi}{4}=k\pi$ $\qquad$ $4x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+n\pi$

$x_1=k\pi-\frac{\pi}{4}$ $\qquad$ $4x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+n\pi$

$4x=\frac{3}{4}\pi+n\pi.$

$x_2=\frac{3}{16}\pi+\frac{n\pi}{4}.$

Найдем решение, входящее в $[120°;150°]$

$k=0:\ x_1=-\frac{\pi}{4}=-45°\notin[120°;150°]$ $\qquad$ $n=0:\ x_2=\frac{3}{16}\pi=33{,}75°\notin[120;150]$

$k=1:\ x_1=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi=135°\in[120°;150°]$ $\qquad$ $n=1:\ x_2=\frac{3}{16}\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{7}{16}\pi=78{,}75°\notin[120°;150°]$

$n=2:\ x_2=\frac{3}{16}\pi+\frac{2\pi}{4}=\frac{11}{16}\pi=123{,}75°\in[120°;150°]$

$n=3:\ x_2=\frac{3}{16}\pi+\frac{3}{4}\pi=\frac{15}{16}\pi=168{,}75°\notin[120°;150°]$

Ответ: $x_1=135°$; $x_2=123{,}75°$

в) $\sin x+\sin 3x=\sin 2x$

Левую часть преобразуем по формуле суммы синусов.

$2\sin\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2}=\sin 2x$

$2\sin 2x\cos(-x)=\sin 2x$

$2\sin 2x\cos x-\sin 2x=0$

$\sin 2x(2\cos x-1)=0.$

$\sin 2x=0$ или $2\cos x-1=0.$

$2x=k\pi$ $\qquad$ $2\cos x=1$

$x_1=\frac{k\pi}{2}$ $\qquad$ $\cos x=\frac{1}{2}$

$x_2=\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi.$; $\quad x_2=\frac{\pi}{3}+2n\pi \quad x_3=-\frac{\pi}{3}+2\pi n$

Найдем решение, входящее в $[-60°;-45°]$

$k=0\ \ x_1=0\notin[-60°;-45°]$ $\qquad$ $n=0:\ x_2=\frac{\pi}{3}=60°\notin[-60°;-45°]$

$x_3=-\frac{\pi}{3}=-60°\in[-60°;-45°]$

$k=-1\ \ x_1=-\frac{\pi}{2}=-90°\notin[-60°;-45°]$ $\qquad$ $n=1:\ x_2=\frac{7}{3}\pi\notin[-60°;-45°]$

$x_3=\frac{5}{3}\pi\notin[-60°;-45°]$

Ответ: $x=-60°$.

г) $\sin^2 2x + \sin^2 x = 1$

Используем формулы понижения степени:

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\cdot 2x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x = 1$

$1 - \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x = 1$

$-\frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x = 0. \mid \cdot(-2)$

$\cos 4x + \cos 2x = 0.$

По формуле суммы ~~cos~~ косинусов получим:

$2\cos\frac{4x+2x}{2}\cos\frac{4x-2x}{2} = 0$

$2\cos 3x \cos x = 0$

$\cos 3x = 0$ или $\cos x = 0.$

$3x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$ $\qquad x_2 = \frac{\pi}{2} + n\pi.$

$x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$

Серии решений совпадают при $n = \frac{k-1}{2}$, поэтому

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}.$

Найдем решение, входящее в $[-45°; -30°]$

$k = 0: x = \frac{\pi}{6} = 30° \notin [-45°; -30°]$

$k = -1: x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} = -30° \in [-45°; -30°]$

Ответ: $x = -30°$

д) $\cos x \cos 5x = \cos 4x \cos 2x$

Преобразуем произведения ~~во~~ в обеих частях уравнения в сумму использовав формулы произведения косинусов.

$\frac{1}{2}\left(\cos(x-5x) + \cos(x+5x)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(4x-2x) + \cos(4x+2x)\right) \mid \cdot 2$

$\cos(-4x) + \cos 6x = \cos 2x + \cos 6x$

$\cos 4x + \cos 6x - \cos 2x - \cos 6x = 0$

$\cos 4x - \cos 2x = 0$

По формуле разности косинусов получим:

$-2\sin\frac{4x+2x}{2}\sin\frac{4x-2x}{2} = 0$

$-2\sin 3x \sin x = 0.$

$\sin 3x = 0$ или $\sin x = 0$

$3x = k\pi$ $\qquad x_2 = n\pi.$

$x_1 = \frac{k\pi}{3}$

При $n=3k$ серии решений совпадают, поэтому
$x=\frac{k\pi}{3}$.
Найдем решение, входящее в $[-90°; -60°]$
$k=-1$: $x=-\frac{\pi}{3}=-60° \in [-90°; -60°]$
Ответ: $x=-60°$.

е) $\cos 3x-\sin x=\cos x-\sin 3x$.
Запишем уравнение следующим образом:
$\cos 3x-\sin x-\cos x+\sin 3x=0$
Сгруппируем одноименные тригонометрические функции:
$(\cos 3x-\cos x)+(\sin 3x-\sin x)=0$.
Применим формулы разности косинусов и разности синусов к соответствующим выражениям в скобках
$-2\sin\frac{3x+x}{2}\sin\frac{3x-x}{2}+2\sin\frac{3x-x}{2}\cos\frac{3x+x}{2}=0$.
$-2\sin 2x\sin x+2\sin x\cos 2x=0$.
$2\sin x(\cos 2x-\sin 2x)=0$.
$2\sin x=0$ или $\cos 2x-\sin 2x=0$
$x_1=k\pi$.
Поскольку это однородное уравнение, делим на $\cos 2x\neq 0$.
$\frac{\cos 2x}{\cos 2x}-\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=0$
$1-tg 2x=0$
$tg 2x=1$
$2x=\frac{\pi}{4}+n\pi$.
$x_2=\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}$
Найдем решение, входящее в $[10°; 30°]$
$k=0$: $x_1=0\notin[10°; 30°]$; $n=0$; $x_2=\frac{\pi}{8}=22,5°\in[10°; 30°]$

ж) $\sin 3x=\cos x\sin 2x$.
Преобразуем произведение в правой части в сумму.
$\sin 3x=\frac{1}{2}(\sin(2x-x)+\sin(2x+x))$
$\sin 3x=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\sin 3x$
$\sin 3x-\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\sin 3x=0$
$\frac{1}{2}\sin 3x-\frac{1}{2}\sin x=0 \mid \cdot 2$

$\sin 3x - \sin x = 0$

По формуле разности синусов получим.

$2\sin\frac{3x-x}{2}\cos\frac{3x+x}{2}=0$

$2\sin x \cos 2x = 0$

$\sin x = 0$ или $\cos 2x = 0$

$x_1 = k\pi$ $\qquad$ $2x = \frac{\pi}{2} + n\pi$

$x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$

Найдем решение входящее в $[150°; 180°]$

$k=0$ $x_1 = 0 \notin [150°; 180°]$

$k=1$ $x_1 = \pi = 180° \in [150°; 180°]$

$n=0$: $x_2 = \frac{\pi}{4} = 45° \notin [150°; 180°]$

$n=1$: $x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi = 135° \notin [150°; 180°]$

$n=2$: $x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5}{4}\pi = 225° \notin [150°; 180°]$

Ответ: $x = 180°$.

Задачи для самостоятельного решения:

① Простейшие тригонометрические уравнения.

Решить уравнения. В ответе указать число корней, принадлежащих указанному промежутку.

а) $\cos\frac{x}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{7}{4}\pi\right]$ б) $\sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3}{2}\pi\right]$

в) $tg\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = 1$; $\left[-\pi; \frac{3}{4}\pi\right]$ г) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = 0$; $[0; \pi]$

д) $\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right) = -1$; $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5}{3}\pi\right]$ е) $tg\left(\frac{\pi}{4}-2x\right) = \sqrt{3}$; $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{4}{3}\pi\right]$

ж) $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(7x+\frac{\pi}{6}\right) = 0$; $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3}{2}\pi\right]$

з) $\left(1-2\sin\frac{x}{2}\right)\left(tg\frac{x}{6}-1\right) = 0$; $\left[-\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$

② Уравнения, приводимые к квадратным.

В ответе указать наибольший целый отрицательный корень. (в градусах)

а) $2\cos^2 x - \cos x = 1$ б) $6\cos^2 4x + \cos 4x = 1$.

в) $2\cos^2 x - 7\sin x = 5$ г) $6\cos^2 x + 5\sin x = 7$

д) $4\sin^2 x - 11\cos x = 1$. е) $2tg\frac{x}{4} - 2ctg\frac{x}{4} = 3$

ж) $tg 2x - 5 ctg 2x = 4$. з) $\cos 2x - 5\cos x = 2$

и) $2\cos x - \cos 2x = \cos^2 x$ к) $\cos 2x + 3\sin x = 2$.

③ Однородные уравнения.

В ответе указать наименьший целый положительный корень (в градусах)

а) $\sin x - \cos x = 0$. б) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$.

в) $3\sin^2 x - 7\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 0$ г) $\sin^2 x + 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$

д) $1 + 4\cos^2 x = 4\sin x\cos x$ е) $6\sin^2 x - 3\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 2$

ж) $\sin 2x = 1 + \sin^2 x$ з) $2\cos 2x + \sin 2x = 1$.

④ Линейные уравнения и уравнения, приводящиеся к ним.

а) $\sin x + \cos x = -1$ б) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$.

в) $5\sin x - 6\cos x = 5$ г) $4\sin x - 6\cos x = 1$.

д) $\sin 2x + 3 = 3\cos x + 3\sin x$ е) $\sin 2x + 4(\cos x + \sin x) = 4 = 0$.

5) Уравнения, решаемые разложением на множители. Решить уравнения. В ответе указать корень, принадлежащий заданному промежутку (в градусах):

а) $\sin 3x = \sin x$; $(0°; 90°)$

б) $\sin 4x = \sin 3x$; $[340°; 370°]$

в) $\cos 7x = \sin x + \cos 5x$; $[-20°; 0)$

г) $\sin 3x + \sin x = 2\sin 2x$; $[90°; 180°]$

д) $\sin 5x \cos 3x = \sin 8x \cos 6x$; $[60; 65°]$

е) $\sin x \sin 3x + \sin 8x \sin 4x = 0$ $[60°; 75°]$

ж) $\sin^2 x - \sin^2 2x + \sin^3 6x = \frac{1}{2}$; $[45°; 90°)$

з) $\sin^2 x + \sin^2 3x + \frac{1}{2}\cos 6x = 1$ $[-45°; -30°]$

и) $2\sin^2 5x + \cos^2 x = \frac{3-\cos 10x}{2}$; $[50°; 60°]$

к) $\cos 3x \cos 7x = \cos 4x$ $[-60°; -30°]$

л) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$ $[70°; 75°]$

м) $4\sin x \sin 2x \sin 3x = \sin 4x$; $(0°; 30°)$