Преобразование тригонометрических выражений.

① Задачи на вычисление

а) Найти $tg\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

б) Найти $\cos\alpha$, если $ctg\alpha = -2$ и $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$.

в) Найти $\cos(\alpha + \frac{\pi}{6})$, если $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

г) Найти $tg\alpha$, если $tg(\frac{\pi}{4} - \alpha) = -2$

д) Найти $\sin(2\alpha + 3\pi)$, если $tg\alpha = \frac{2}{3}$.

е) Найти $\cos(\alpha + \beta)$, если $\cos\alpha = -\frac{9}{41}$; $\sin\beta = \frac{40}{41}$; $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$; $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

ж) Найти $\frac{5\cos\alpha + 6\sin\alpha}{3\sin\alpha - 8\cos\alpha}$, если $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$

з) Найти наибольшее значение выражения:
$\sqrt{3}\cos x - \sin x$

Решение

а) Т.к. $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, то найдем $\sin\alpha$:

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} =$
$= \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}}$; и т.к. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

Найдем $tg\alpha = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} = 0,75$.

б) Т.к. $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = ctg\alpha \cdot \sin\alpha$

Найдем $\sin\alpha$:

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{1+ctg^2\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+ctg^2\alpha}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{1+4}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \quad (\text{т.к. } \tfrac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi)$$

Найдем $\cos\alpha = -2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

в) По формуле косинуса суммы для $\cos(\alpha + \frac{\pi}{6})$ получим:

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\alpha\cos\frac{\pi}{6} - \sin\alpha\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Найдем $\cos\alpha$:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha;\ \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} =$$
$$= -\sqrt{1-\frac{1}{3}} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \quad (\text{т.к. } \pi < \alpha < \tfrac{3}{2}\pi)$$

Найдем $\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})$

$\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{\sqrt{3}}{6}=-\sqrt{\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{6}}=$

$=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{2}}{12}=\frac{\sqrt{6}-2}{12}.$

г) Воспользуемся формулой $tg(x-y)=\frac{tgx-tgy}{1+tgx\,tgy}$

$tg(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{tg\frac{\pi}{4}-tg\alpha}{1+tg\frac{\pi}{4}tg\alpha}=\frac{1-tg\alpha}{1+tg\alpha}$

Т.к. $tg(\frac{\pi}{4}-\alpha)=-2$, то получим:

$\frac{1-tg\alpha}{1+tg\alpha}=-2 \mid\cdot(1+tg\alpha)$

$1-tg\alpha=-2(1+tg\alpha)$

$1-tg\alpha=-2-2tg\alpha$

$2tg\alpha-tg\alpha=-2-1$

$tg\alpha=-3.$

д) По правилу приведения имеем: $\sin(2\alpha+3\pi)=-\sin 2\alpha.$

Воспользуемся формулой выражения синуса через тангенс половинного аргумента:

$\sin\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \sin 2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{2}{3}}{1+(\frac{2}{3})^2}=\frac{\frac{4}{3}}{1+\frac{4}{9}}=$

$=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{13}{9}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{13}=\frac{12}{13}.$

$\sin(2\alpha+3\pi)=-\sin2\alpha=-\frac{12}{13}.$

е) По формуле косинуса суммы получим:

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=-\frac{9}{41}\cos\beta-\frac{40}{41}\sin\alpha.$

Найдем $\sin\alpha$ и $\cos\beta$:

$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1 \Rightarrow \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha \Rightarrow \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=$

$=-\sqrt{1-(-\frac{9}{41})^2}=-\sqrt{1-\frac{81}{1681}}=-\sqrt{\frac{1681-81}{1681}}=-\sqrt{\frac{1600}{1681}}=-\frac{40}{41}$ (т.к. $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$)

$\cos^2\beta+\sin^2\beta=1 \Rightarrow \cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-(\frac{40}{41})^2}=$

$=-\sqrt{1-\frac{1600}{1681}}=-\sqrt{\frac{1681-1600}{1681}}=-\sqrt{\frac{81}{1681}}=-\frac{9}{41}$ (т.к. $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$)

Найдем $\cos(\alpha+\beta)$

$$\cos(\alpha+\beta) = -\frac{9}{41}\cos\beta - \frac{40}{41}\sin\alpha = -\frac{9}{41}\cdot\left(-\frac{9}{41}\right) - \frac{40}{41}\cdot\left(-\frac{40}{41}\right) = \frac{81}{1681} + \frac{1600}{1681} =$$

$$= \frac{1681}{1681} = 1.$$

ж) Т.к. выражение содержит только функции целого аргумента, то найдем $tg\alpha$ по формуле двойного угла:

$$tg\,2x = \frac{2tgx}{1-tg^2x} \Rightarrow tg\alpha = tg\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cdot\frac{\sqrt{17}+1}{2}}{1-\left(\frac{\sqrt{17}+1}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{17}-1}{1-\frac{17-2\sqrt{17}+1}{4}} = \frac{4(\sqrt{17}-1)}{4-(18-2\sqrt{17})} = \frac{4(\sqrt{17}-1)}{4-18+2\sqrt{17}} = \frac{4(\sqrt{17}-1)}{2\sqrt{17}-14} =$$

$$= \frac{4(\sqrt{17}-1)}{2(\sqrt{17}-7)} = \frac{2(\sqrt{17}-1)}{\sqrt{17}-7} = \frac{2(\sqrt{17}-1)(\sqrt{17}+7)}{(\sqrt{17}-7)(\sqrt{17}+7)} = \frac{2(17+7\sqrt{17}-\sqrt{17}-7)}{17-49} =$$

$$= -\frac{2(10+6\sqrt{17})}{32} = -\frac{10+6\sqrt{17}}{16} = -\frac{5+3\sqrt{17}}{8}$$

Разделим числитель и знаменатель выражения на $\cos\alpha \neq 0$, чтобы выразить все через $tg\alpha = -\frac{5+3\sqrt{17}}{8}$

$$\frac{5\cos\alpha+6\sin\alpha}{3\sin\alpha-8\cos\alpha} = \frac{5\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}-6\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{3\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-8\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{5-6tg\alpha}{3tg\alpha-8} = \frac{5+6\cdot\frac{5+3\sqrt{17}}{8}}{-3\cdot\frac{5+3\sqrt{17}}{8}-8} =$$

$$= -\frac{8\left(5+6\cdot\frac{5+3\sqrt{17}}{8}\right)}{8\left(3\cdot\frac{5+3\sqrt{17}}{8}+8\right)} = -\frac{40+6(5+3\sqrt{17})}{3(5+3\sqrt{17}+64)} = -\frac{40+30+18\sqrt{17}}{15+9\sqrt{17}+192} = -\frac{70+18\sqrt{17}}{207+9\sqrt{17}} =$$

$$= -\frac{(35+9\sqrt{17})\cdot 2}{(23+\sqrt{17})\cdot 9} = -\frac{2(35+9\sqrt{17})(23-\sqrt{17})}{9(23+\sqrt{17})(23-\sqrt{17})} = -\frac{2(805-35\sqrt{17}+207\sqrt{17}-153)}{9(529-17)} =$$

$$= -\frac{2(652+172\sqrt{17})}{9\cdot 512} = -\frac{652+172\sqrt{17}}{9\cdot 256} = -\frac{4(163+43\sqrt{17})}{9\cdot 256} = -\frac{16+43\sqrt{17}}{576}$$

3) Положим $\sqrt{3}$ как tgy. Получим

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = tgy\cos x - \sin x = \frac{\sin y\cos x}{\cos y} - \sin x = \frac{\sin y\cos x - \sin x\cos y}{\cos y} =$$

$$= \frac{\sin(y-x)}{\cos y}.$$

Найдем $\cos y$: $tgy = \sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos y = \frac{1}{2}$. Получим:

$$\frac{\sin(y-x)}{\cos y} = \frac{\sin(y-x)}{\frac{1}{2}} = 2\sin(y-x)$$

Т.к. $-1 \le \sin(y-x) \le 1 \Rightarrow -2 \le 2\sin(y-x) \le 2$, то наибольшее значени выражения равно 2.

② Упрощение тригонометрических выражений.

а) $\sin^4\alpha + \cos^2\alpha \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$

б) $1 - \sin^6\alpha - \cos^6\alpha$

в) $\sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\alpha - \cos\alpha$

г) $\sin^2(\alpha + 30^\circ) + \sin^2(\alpha - 30^\circ) - \sin^2\alpha$

д) $\sin 6\alpha \, ctg 3\alpha - \cos 6\alpha$

е) $\dfrac{\sin 3\alpha - \sin\alpha + \cos 2\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \sin 2\alpha}$

ж) $\sin 2\alpha + 2\sin\left(\frac{5}{12}\pi - \alpha\right)\cos\left(\frac{5}{12}\pi + \alpha\right)$

з) $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2$

и) $\left(\dfrac{\cos 5\alpha}{\sin\alpha} + \dfrac{\sin 5\alpha}{\cos\alpha}\right) \cdot \dfrac{\sin 10\alpha - \sin 6\alpha}{\cos 4\alpha}$

к) $\dfrac{\cos\left(2\pi + \frac{\alpha}{4}\right) - \sin\left(2\pi + \frac{\alpha}{4}\right) ctg \frac{\alpha}{8}}{\cos\left(\frac{7}{2}\pi - \frac{\alpha}{4}\right) + \cos\left(\frac{\alpha}{4} - 3\pi\right) ctg \frac{\alpha}{8}}$.

Решение.

а) $\sin^4\alpha + \cos^2\alpha \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$

Из первых двух слагаемых вынесем общий множитель $\sin^2\alpha$; учитывая, что $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$:

$\sin^4\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha =$
$= 1$.

б) $1 - \sin^6\alpha - \cos^6\alpha$

Сгруппируем $\sin^6\alpha$ и $\cos^6\alpha$ и используем формулу суммы кубов:

$1 - \sin^6\alpha - \cos^6\alpha = 1 - (\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) = 1 - ((\sin^2\alpha)^3 + (\cos^2\alpha)^3) =$
$= 1 - (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha) = 1 - (\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha)$

В скобках прибавим и вычтем $2\cos^2\alpha\sin^2\alpha$ чтобы выделить полный квадрат суммы:

$1 - (\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha) = 1 - (\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha +$
$+ \cos^4\alpha) = 1 - ((\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha) = 1 - (1 - 3\cos^2\alpha\sin^2\alpha) =$
$= 1 - 1 + 3\cos^2\alpha\sin^2\alpha = 3\cos^2\alpha\sin^2\alpha = \frac{3}{4} \cdot 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \frac{3}{4}(2\sin\alpha\cos\alpha)^2 =$
$\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$.

в) Используем формулу синуса суммы для выражения $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$

$\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})-\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4})-\sin\alpha-\cos\alpha=$
$=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha)-\sin\alpha-\cos\alpha=\sin\alpha+\cos\alpha-\sin\alpha-\cos\alpha=0.$

г) $\sin^2(\alpha+30°)+\sin^2(\alpha-30°)-\sin^2\alpha$

Раскроем $\sin(\alpha+30°)$ и $\sin(\alpha-30°)$ по соответствующим формулам:

$\sin^2(\alpha+30°)+\sin^2(\alpha-30°)-\sin^2\alpha=(\sin\alpha\cos 30°+\cos\alpha\sin 30°)^2+$
$+(\sin\alpha\cos 30°-\cos\alpha\sin 30°)^2-\sin^2\alpha=(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha)^2-$
$-\sin^2\alpha=\frac{3}{4}\sin^2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{1}{4}\cos^2\alpha+\frac{3}{4}\sin^2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{1}{4}\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=$
$=\frac{3}{2}\sin^2\alpha+\frac{1}{2}\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{1}{2}\sin^2\alpha+\frac{1}{2}\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\frac{1}{2}$

д) Раскроем $\cos 6\alpha$ и $\sin 6\alpha$ по формулам двойного угла:

$\sin 6\alpha\,ctg\,3\alpha-\cos 6\alpha=\sin 2\cdot 3\alpha\,ctg\,3\alpha-\cos 2\cdot 3\alpha=2\sin 3\alpha\cos 3\alpha\frac{\cos 3\alpha}{\sin 3\alpha}$
$-\cos^2 3\alpha+\sin^2 3\alpha=2\cos^2 3\alpha-\cos^2 3\alpha+\sin^2 3\alpha=\cos^2 3\alpha+\sin^2 3\alpha=1.$

е) Для числителя и знаменателя применим формулы разности синусов и разности косинусов.

$$\frac{\sin 3\alpha-\sin\alpha+\cos 2\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\sin 2\alpha}=\frac{2\sin\frac{3\alpha-\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha+\alpha}{2}+\cos 2\alpha}{-2\sin\frac{\alpha+3\alpha}{2}\sin\frac{\alpha-3\alpha}{2}+\sin 2\alpha}=$$
$$=\frac{2\sin\alpha\cos 2\alpha+\cos 2\alpha}{-2\sin 2\alpha\sin(-\alpha)+\sin 2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos 2\alpha+\cos 2\alpha}{2\sin 2\alpha\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\frac{\cos 2\alpha(2\sin\alpha+1)}{\sin 2\alpha(2\sin\alpha+1)}=$$
$$=\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=ctg\,2\alpha.$$

ж) $\sin 2\alpha+2\sin(\frac{5}{12}\pi-\alpha)\cos(\frac{5}{12}\pi+\alpha);$

Преобразуем произведение синуса и косинуса по соответствующим формулам:

$\sin 2\alpha+2\cdot\frac{1}{2}\cdot(\sin(\frac{5}{12}-\alpha-\frac{5}{12}\pi-\alpha)+\sin(\frac{5}{12}\pi-\alpha+\frac{5}{12}\pi+\alpha))=\sin 2\alpha$
$+\sin(-2\alpha)+\sin(\frac{10}{12}\pi)=\sin 2\alpha-\sin 2\alpha+\sin(\pi-\frac{2}{12}\pi)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$

з) $(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2$

Применим формулы суммы косинусов и суммы синусов для выражений в скобках:

$$(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2=\left(2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2+\left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=$$

$$=4\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+4\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=4\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\left(\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)=4\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

и) $\left(\frac{\cos5\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin5\alpha}{\cos\alpha}\right)\cdot\frac{\sin10\alpha-\sin6\alpha}{\cos4\alpha}$

Приведем дроби, стоящие в скобках, к общему знаменателю, после чего воспользуемся формулой косинуса разности. Числитель дроби за скобками преобразуем по формуле разности синусов.

$$\left(\frac{\cos5\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin5\alpha}{\cos\alpha}\right)\frac{\sin10\alpha-\sin6\alpha}{\cos4\alpha}=\frac{\cos5\alpha\cos\alpha+\sin5\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\times$$

$$\times\frac{2\sin\frac{10\alpha-6\alpha}{2}\cos\frac{10\alpha+6\alpha}{2}}{\cos4\alpha}=\frac{\cos(5\alpha-\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}\cdot\frac{2\sin2\alpha\cos8\alpha}{\cos4\alpha}=\frac{\cos4\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\cdot\frac{4\sin\alpha\cos\alpha\cos8\alpha}{\cos4\alpha}$$

$$=4\cos8\alpha$$

к) Т.к. $\frac{\alpha}{4}=2\cdot\frac{\alpha}{8}$, то следует воспользоваться формулами двойного угла, применив перед этим формулы приведения:

$$\frac{\cos(2\pi+\frac{\alpha}{4})-\sin(2\pi+\frac{\alpha}{4})\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{8}}{\cos(\frac{7}{2}\pi-\frac{\alpha}{4})+\cos(\frac{\alpha}{4}-3\pi)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{8}}=\frac{\cos\frac{\alpha}{4}-\sin\frac{\alpha}{4}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{8}}{-\sin\frac{\alpha}{4}-\cos\frac{\alpha}{4}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{8}}=$$

$$=-\frac{\cos^2\frac{\alpha}{8}-\sin^2\frac{\alpha}{8}-2\sin\frac{\alpha}{8}\cos\frac{\alpha}{8}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{8}}{\sin\frac{\alpha}{8}}}{2\sin\frac{\alpha}{8}\cos\frac{\alpha}{8}+(\cos^2\frac{\alpha}{8}-\sin^2\frac{\alpha}{8})\frac{\cos\frac{\alpha}{8}}{\sin\frac{\alpha}{8}}}=-\frac{\cos^2\frac{\alpha}{8}-\sin^2\frac{\alpha}{8}-2\cos^2\frac{\alpha}{8}}{\cos\frac{\alpha}{8}\left(2\sin\frac{\alpha}{8}+(\cos^2\frac{\alpha}{8}-\sin^2\frac{\alpha}{8})\cdot\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{8}}\right)}=$$

$$=-\frac{-\sin^2\frac{\alpha}{8}-\cos^2\frac{\alpha}{8}}{\cos\frac{\alpha}{8}\left(2\sin\frac{\alpha}{8}+\frac{\cos^2\frac{\alpha}{8}}{\sin\frac{\alpha}{8}}-\sin\frac{\alpha}{8}\right)}=\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{8}\cdot\left(\sin\frac{\alpha}{8}+\frac{\cos^2\frac{\alpha}{8}}{\sin\frac{\alpha}{8}}\right)}=\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{8}\cdot\frac{\sin^2\frac{\alpha}{8}+\cos^2\frac{\alpha}{8}}{\sin\frac{\alpha}{8}}}=$$

$$=\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{8}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{8}}}=\frac{1}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{8}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

(1) Задачи на вычисление

а) Найти $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{1}{4}$ и $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$

б) Найти $tg\,\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{3}{4}$ и $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$.

в) Найти $\sin\alpha$, если $tg\,\alpha = -3$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

г) Найти $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$, если $\cos\alpha = -0{,}6$ и $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$

д) Найти $tg\,\alpha$, если $tg\,2\alpha = 3\frac{3}{7}$ и $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$

е) Найти $\sin 2\alpha$, если $tg\,\alpha = -2$ и $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$

ж) Найти $tg\,\beta$, если $tg(\alpha+\beta) = -1$ и $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$

з) Найти $\sin(\alpha - \beta)$, если $\sin\alpha = -\frac{3}{4}$, $\cos\beta = -\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$, $\pi < \beta < \frac{3}{2}\pi$.

и) Найти $\dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{2\sin\alpha + 3\cos\alpha}$, если $tg\,\alpha = -\frac{1}{4}$

к) Найти $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - 4\cos^2\alpha}$, если $ctg\,\alpha = 5$.

л) Найти наибольшее значение выражения: $\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$.

м) Найти наибольшее значение выражения: $3\sin\alpha - \cos\alpha$.

(2) Упрощение тригонометрических выражений.

а) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$

б) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + 2\cos^2\alpha$

в) $tg\,\alpha + \dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$

г) $3\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^6\alpha + \sin^6\alpha$

д) $2\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) + \sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha$

е) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos(\alpha + 45^\circ)}{2\sin(\alpha+45^\circ) - \sqrt{3}\cos\alpha}$

ж) $\dfrac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)}$

з) $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha\, ctg\,\alpha$

и) $tg\,\alpha\cos 2\alpha - \sin 2\alpha$

к) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha - 2\sin 2\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha - 2\cos 2\alpha}$

л) $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha}$

м) $\dfrac{(\sin 6\alpha + \sin 2\alpha)(\cos 2\alpha - \cos 6\alpha)}{1 - \cos 8\alpha}$

н) $\left(\dfrac{\cos\alpha}{\cos 4\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{\sin 4\alpha}\right) \cdot \dfrac{\cos 6\alpha - \cos 10\alpha}{\sin 3\alpha}$

о) $\cos 2\alpha + 2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$ п) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+\sin^2\alpha$

р) $(\sin\alpha-\sin\beta)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2$

с) $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}}{\sin\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{5}{2}\pi\right)-\sin\left(\frac{\alpha}{4}-3\pi\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}}$

т) $\dfrac{2\cos^2 2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)}$