Логарифмы и их свойства. Логарифмические уравнения и неравенства

Примеры решения задач.

1. Упрощение логарифмических выражений:

а) $\log_2 32 - \log_{21}\sqrt{21} - 3\log_4\frac{1}{64}$

б) $\log_3 8 + 3\log_3 4{,}5$

в) $\frac{1}{2}\log_7 36 - \log_7 14 - 3\log_7\sqrt[3]{21}$

г) $\dfrac{\log_2 24 - \frac{1}{2}\log_2 72}{\log_3 18 - \frac{1}{3}\log_3 72}$

д) $9^{\log_3\sqrt{5}}$

е) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{9}} 4}$

ж) $10^{3-\lg 4} - 49^{\log_7 15}$

з) $\left(\log_{14} 2 + \log_{14} 7 + 5^{\log_5 6}\right)^{\log_7 16}$

Решение:

а) Используя свойство логарифма степени, получим:

$$\log_2 32 - \log_{21}\sqrt{21} - 3\log_4\frac{1}{64} = \log_2 2^5 - \log_{21} 21^{\frac{1}{2}} - 3\log_4\left(\frac{1}{4}\right)^3 =$$
$$=5\log_2 2 - \frac{1}{2}\log_{21} 21 - 3\log_4 4^{-3} = 5 - \frac{1}{2} + 9 = 13{,}5$$

б) Используя свойство логарифма степени и свойство суммы логарифмов, получим

$$\log_3 8 + 3\log_3 4{,}5 = \log_3 8 + 3\log_3\frac{9}{2} = \log_3 8 + \log_3\left(\frac{9}{2}\right)^3 = \log_3 8\cdot\frac{9^3}{2^3} =$$
$$=\log_3 9^3 = 3\log_3 9 = 3\cdot 2 = 6.$$

в) Используя свойство логарифма степени и свойство ~~по~~ разности логарифмов, получим:

$$\frac{1}{2}\log_7 36 - \log_7 14 - 3\log_7\sqrt[3]{21} = \log_7 36^{\frac{1}{2}} - \log_7 14 - \log_7\left(\sqrt[3]{21}\right)^3 =$$
$$= \log_7\sqrt{36} - \left(\log_7 14 + \log_7 21\right) = \log_7 6 - \log_7 14\cdot 21 = \log_7\frac{6}{14\cdot 21} =$$
$$=\log_7\frac{1}{7\cdot 7} = \log_7\frac{1}{49} = \log_7\left(\frac{1}{7}\right)^2 = \log_7 7^{-2} = -2.$$

г) Чтобы освободиться от знаменателей, домножим числитель и знаменатель выражения на общее кратное знаменателей (в данном случае – на 6). После применим свойство разности логарифмов:

$$\frac{\log_2 24 - \frac{1}{2}\log_2 72}{\log_3 18 - \frac{1}{3}\log_3 72} = \frac{6\log_2 24 - 3\log_2 72}{6\log_3 18 - 2\log_3 72} = \frac{\log_2 24^6 - \log_2 72^3}{\log_3 18^6 - \log_3 72^2} =$$

$$=\frac{\log_2\frac{24^6}{72^3}}{\log_3\frac{18^6}{72^2}}=\frac{\log_2\frac{24^6}{24^3\cdot 3^3}}{\log_3\frac{18^6}{18^2\cdot 4^2}}=\frac{\log_2\left(\frac{24}{3}\right)^3}{\log_3\frac{18^4}{4^2}}=\frac{\log_2 8^3}{\log_3\left(\frac{18}{2}\right)^4}=\frac{3\cdot\log_2 8}{4\cdot\log_3 9}=\frac{3\cdot 3}{4\cdot 2}=\frac{9}{8}$$

д) Представив 9 как 3^2, по основному логарифмическому тождеству получим:

$$9^{\log_3\sqrt5}=(3^2)^{\log_3\sqrt5}=\left(3^{\log_3\sqrt5}\right)^2=(\sqrt5)^2=5.$$

е) Представив $\frac13$ как $\sqrt{\frac19}$, по основному логарифмическому тождеству получим:

$$\left(\frac13\right)^{\log_{\frac19}4}=\left(\sqrt{\frac19}\right)^{\log_{\frac19}4}=\sqrt{\left(\frac19\right)^{\log_{\frac19}4}}=\sqrt4=2$$

ж) Использовав правила действий со степенями и основное логарифмическое тождество, получим:

$$10^{3-\lg4}-49^{\log_7 15}=\frac{10^3}{10^{\lg 4}}-(7^2)^{\log_7 15}=\frac{1000}{4}-\left(7^{\log_7 15}\right)^2=$$
$$=250-15^2=250-225=25.$$

з) Упростим вначале выражение в скобках, а после используем основное логарифмическое тождество:

$$\left(\log_{14}2+\log_{14}7+5^{\log_5 6}\right)^{\log_7 16}=\left(\log_{14}(7\cdot2)+6\right)^{\log_7 16}=$$
$$=\left(\log_{14}14+6\right)^{\log_7 16}=7^{\log_7 16}=16.$$

② Переход к новому основанию логарифма.

а) $\dfrac{\log_5 36-\log_5 12}{\log_5\frac13}$

б) $\dfrac{\log_5 2}{\log_5 6}+\dfrac{\log_4 3}{\log_4 6}$

в) $\log_{\frac15}\left(\dfrac{1}{25\sqrt5}\right)$

г) $\log_{27}(81\sqrt{27})$

д) $81^{\frac{1}{\log_5 3}}$

е) $\left(5^{\frac{4}{\log_{\sqrt3}5}+\frac{1}{2\log_4 5}}\right)^{\frac{1}{\log_6 18}}$

ж) $\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 32$

з) Найти $\log_8 9$, если $\log_{12}18=a$

и) Выразить через a и b $\log_{35}28$, если $a=\log_{14}7$, $b=\log_{14}140$.

Решение.

а) Преобразуем числитель по формуле логарифма разности

$$\frac{\log_5 36-\log_5 12}{\log_5\frac{1}{3}}=\frac{\log_5\frac{36}{12}}{\log_5\frac{1}{3}}=\frac{\log_5 3}{\log_5\frac{1}{3}}.$$

По формуле перехода к новому основанию получим

$$\frac{\log_5 3}{\log_5\frac{1}{3}}=\log_{\frac{1}{3}}3=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=-1.$$

б) Применив дважды формулу перехода к новому основанию логарифма, получим:

$$\frac{\log_5 2}{\log_5 6}+\frac{\log_4 3}{\log_4 6}=\log_6 2+\log_6 3=\log_6(2\cdot 3)=\log_6 6=1.$$

в) Заметив, что и основание, и подлогарифмическое выражение, является степенями числа 5, перейдем к основанию логарифма 5.

$$\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{25\sqrt[4]{5}}\right)=\frac{\log_5\left(\frac{1}{25\sqrt[4]{5}}\right)}{\log_5\frac{1}{5}}=-\log_5\left(25\sqrt[4]{5}\right)^{-1}=\log_5 5^2\cdot 5^{\frac{1}{4}}=$$

$$=\log_5 5^{2\frac{1}{4}}=2\tfrac{1}{4}=2{,}25.$$

г) Т.к. и основание логарифма, и подлогарифмическое выражение являются степенями числа 3, то перейдем к основанию логарифма 3:

$$\log_{27}(81\sqrt{27})=\frac{\log_3(81\sqrt{27})}{\log_3 27}=\frac{\log_3 81+\log_3\sqrt{27}}{3}=\frac{4+\log_3\sqrt{3^3}}{3}=$$

$$=\frac{4+\log_3 3^{\frac{3}{2}}}{3}=\frac{4+\frac{3}{2}}{3}=\frac{\frac{11}{2}}{3}=\frac{11}{6}=1\tfrac{5}{6}.$$

д) Используем формулу обмена основания и подлогарифмического выражения для показателя степени:

$$81^{\frac{1}{\log_5 3}}=81^{\log_3 5}=(3^4)^{\log_3 5}=(3^{\log_3 5})^4=5^4=625$$

е) Представим выражение в скобках в виде произведения, после чего применим формулу обмена основания и подлогарифмического выражения

$$\left(5^{\frac{4}{\log_{\sqrt{3}}5}+\frac{1}{2\log_4 5}}\right)^{\frac{1}{\log_6 18}}=\left(5^{\frac{4}{\log_{\sqrt{3}}5}}\cdot 5^{\frac{1}{2\log_4 5}}\right)^{\frac{1}{\log_6 18}}=\left(\left(5^{\log_5\sqrt{3}}\right)^4\cdot\left(5^{\log_5 4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_{18}6}$$

$$=\left((\sqrt{3})^4\cdot\sqrt{4}\right)^{\log_{18}6}=(9\cdot 2)^{\log_{18}6}=18^{\log_{18}6}=6.$$

ж) Приведем все множители, кроме первого к основанию 4:

$\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 32 = \log_4 5 \cdot \frac{\log_4 6}{\log_4 5} \cdot \frac{\log_4 7}{\log_4 6} \cdot \frac{\log_4 32}{\log_4 7} =$

$= \log_4 32 = \log_4 2^5 = 5\log_4 2 = 5\log_4 \sqrt{4} = 5\log_4 4^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}\log_4 4 = \frac{5}{2} = 2{,}5$

з) Найти $\log_8 9$, если $\log_{12} 18 = a$.

Рассмотрим выражение $x = \log_8 9$. Приведем его к основанию 2:

$x = \frac{\log_2 9}{\log_2 8} = \frac{\log_2 3^2}{3} = \frac{2}{3}\log_2 3.$

Рассмотрим теперь выражение $\log_{12} 18 = a$. Приведем и его к основанию 2:

$\log_{12} 18 = \frac{\log_2 18}{\log_2 12} = \frac{\log_2 (2\cdot 9)}{\log_2 (4 \cdot 3)} = \frac{\log_2 2 + \log_2 3^2}{\log_2 4 + \log_2 3} = \frac{1 + 2\log_2 3}{2 + \log_2 3}$

Таким образом:

$\frac{1 + 2\log_2 3}{2 + \log_2 3} = a$; Выразим из этого равенства $\log_2 3$.

$1 + 2\log_2 3 = a \cdot (2 + \log_2 3)$

$1 + 2\log_2 3 = 2a + a\log_2 3$

$2\log_2 3 - a\log_2 3 = 2a - 1$

$\log_2 3 \cdot (2 - a) = 2a - 1$

$\log_2 3 = \frac{2a - 1}{2 - a}$

Подставив в выражение для x, получим:

$x = \frac{2}{3}\log_2 3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2a-1}{2-a} = \frac{4a-2}{6-3a}.$

и) Выразить через a и b $\log_{35} 28$, если $a = \log_{14} 7$, $b = \log_{14} 140$

Т.к. все основания логарифмов кратны 7, то приведем их к этому основанию

$x = \log_{35} 28 = \frac{\log_7 28}{\log_7 35} = \frac{\log_7 (4 \cdot 7)}{\log_7 (5 \cdot 7)} = \frac{\log_7 4 + \log_7 7}{\log_7 5 + \log_7 7} = \frac{\log_7 2^2 + 1}{\log_7 5 + 1} =$

$= \frac{2\log_7 2 + 1}{\log_7 5 + 1}$

Рассмотрим выражение $a = \log_{14} 7$. Обменяем основание и подлогарифмическое выражение местами:

$$a = \log_{14} 7 = \frac{1}{\log_7 14} = \frac{1}{\log_7 (7 \cdot 2)} = \frac{1}{\log_7 7 + \log_7 2} = \frac{1}{1 + \log_7 2}$$

Найдем $\log_7 2$:

$$a = \frac{1}{1+\log_7 2}; \quad 1 + \log_7 2 = \frac{1}{a}; \quad \log_7 2 = \frac{1}{a} - 1; \quad \log_7 2 = \frac{1-a}{a}$$

Рассмотрим выражение $b = \log_{14} 140$. Перейдем к основанию 7:

$$\log_{14} 140 = \frac{\log_7 140}{\log_7 14} = \frac{\log_7 (7 \cdot 4 \cdot 5)}{\log_7 (7 \cdot 2)} = \frac{\log_7 7 + \log_7 4 + \log_7 5}{\log_7 7 + \log_7 2} =$$

$$\frac{1 + \log_7 2^2 + \log_7 5}{1 + \log_7 2} = \frac{1 + 2\log_7 2 + \log_7 5}{1 + \log_7 2}$$

Т.к. $\log_7 2 = \frac{1-a}{a}$, то получим:

$$\frac{1 + 2\log_7 2 + \log_7 5}{1 + \log_7 2} = \frac{1 + \frac{2-2a}{a} + \log_7 5}{1 + \frac{1-a}{a}} = \frac{a\left(1 + \frac{2-2a}{a} + \log_7 5\right)}{a\left(1 + \frac{1-a}{a}\right)} =$$

$$= \frac{a + 2 - 2a + a\log_7 5}{a + 1 - a} = 2 - a + a\log_7 5$$

Найдем $\log_7 5$:

$$2 - a + a\log_7 5 = b; \quad a\log_7 5 = b + a - 2; \quad \log_7 5 = \frac{a+b-2}{a}$$

Подставим выражения для $\log_7 2$ и $\log_7 5$ в выражение для x. Получим:

$$x = \frac{2\log_7 2 + 1}{\log_7 5 + 1} = \frac{2 \cdot \frac{1-a}{a} + 1}{\frac{a+b-2}{a} + 1} = \frac{a\left(\frac{2-2a}{a} + 1\right)}{a\left(\frac{a+b-2}{a} + 1\right)} = \frac{2 - 2a + a}{a + b - 2 + a} = \frac{2-a}{2a+b-2}.$$

3 Логарифмические уравнения.

Решить уравнения. Если уравнение имеет несколько корней, в ответ записать их сумму

а) $\log_2 (x+3) = 4$

б) $\log_5 (x-10) = 2 + \log_5 2$

в) $\log_6 (2x^2 - x) = 1 - \log_6 2$

г) $\log_8 (x^2 - 7x + 4) = \log_8 (x-3)$

д) $\log_3 (x+3) + \log_3 (x+1) = 1$

е) $\log_5 (1+x) - \log_5 (1-x) = \log_5 (2x+3)$

ж) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} (x-1) - \log_4 \sqrt{x-1} = -9$

з) $\log_{16} x + \log_8 x + \log_2 x = \frac{19}{12}$

и) $\log_2^2 x^3 - \log_2 x^8 = 1$

к) $x^{\log_5 x - 2} = 125$

л) $\log_{x-2}(4x^2 - 14x + 7) = 2$

м) $\log_2(4\cdot 3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1$.

Решение.

а) $\log_2(x+3) = 4$.

Представим 4 как $\log_2 16$. Получим:

$\log_2(x+3) = \log_2 16$

$x+3 = 16$

$x = 13$.

Проверка:

$\log_2(13+3) = 4$

$\log_2 16 = 4$

$4 = 4$ – верно.

б) $\log_5(x-10) = 2 + \log_5 2$

Приведем выражение в правой части к логарифму с основанием 5. Т.к. $2 = \log_5 25$, то:

$\log_5(x-10) = \log_5 25 + \log_5 2$

$\log_5(x-10) = \log_5(25\cdot 2)$

$\log_5(x-10) = \log_5 50$

$x - 10 = 50$

$x = 60$.

Проверка:

$\log_5(60-10) = 2 + \log_5 2$

$\log_5 50 = 2 + \log_5 2$

$\log_5(2\cdot 25) = 2 + \log_5 2$

$\log_5 2 + 2 = 2 + \log_5 2$ – верно.

в) $\log_6(2x^2 - x) = 1 - \log_6 2$

Приведем выражение в правой части к логарифму с основанием 6.

$\log_6(2x^2 - x) = \log_6 6 - \log_6 2$

$\log_6(2x^2 - x) = \log_6 \frac{6}{2}$

$\log_6(2x^2 - x) = \log_6 3$

$2x^2 - x = 3$

$2x^2 - x - 3 = 0$

$D = 1 - 4\cdot 2\cdot(-3) = 25$; $\sqrt{D} = 5$;

$x_1 = \frac{1+5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ $\quad x_2 = \frac{1-5}{4} = -1$.

Проверка

$x=1{,}5:\ \log_6(2\cdot 1{,}5^2-1{,}5)=1-\log_6 2$

$\log_6(4{,}5-1{,}5)=\log_6 3$

$\log_6 3=\log_6 3$. – верно.

$x=-1:\ \log_6(2\cdot(-1)^2-(-1))=1-\log_6 2$

$\log_6(2+1)=\log_6 3$

$\log_6 3=\log_6 3$. – верно.

Сумма корней: $x_1+x_2=-1+1{,}5=0{,}5$.

г) $\log_8(x^2-7x+4)=\log_8(x-3)$

$x^2-7x+4=x-3$

$x^2-7x+4-x+3=0$

$x^2-8x+7=0$

$x_1=1\quad x_2=7$

Проверка:

$x=1:\ \log_8(1^2-7\cdot 1+4)=\log_8(1-3)$

$\log_8(-2)=\log_8(-2)$ – нет смысла.

$x=7:\ \log_8(7^2-7\cdot 7+4)=\log_8(7-3)$

$\log_8 4=\log_8 4$ – верно.

д) $\log_3(x+3)+\log_3(x+1)=1$

По свойству суммы логарифмов получим:

$\log_3[(x+3)(x+1)]=1$; т.к. $\log_3 3=1$, то:

$\log_3[(x+3)(x+1)]=\log_3 3$

$(x+3)(x+1)=3$

$x^2+3x+x+3=3$

$x^2+4x+3-3=0$

$x^2+4x=0$

$x(x+4)=0$

$x_1=0\quad x_2=-4$

Проверка:

$x=0:\ \log_3(0+3)+\log_3(0+1)=1$

$\log_3 3+\log_3 1=1$

$1+0=1$

$1=1$ – верно

$x=-4:\ \log_3(-4+3)+\log_3(-4+1)=1$

$\log_3(-1)+\log_3(-3)=1$ – нет смысла.

е) $\log_5(1+x) - \log_5(1-x) = \log_5(2x+3)$

По формуле разности логарифмов получим:

$\log_5 \frac{1+x}{1-x} = \log_5(2x+3)$; $1-x\neq 0$; $x\neq 1$.

$\frac{1+x}{1-x} = 2x+3 \mid \cdot(1-x)$

$1+x = (2x+3)(1-x)$

$1+x = 2x-2x^2+3-3x$

$1+x-2x+2x^2-3+3x=0$

$2x^2+2x-2=0$

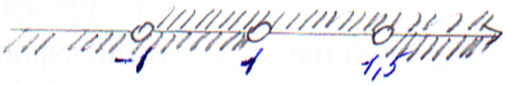
$x^2+x-1=0$

$D = 1-4\cdot1\cdot(-1)=5$; $\sqrt{D}=\sqrt5$

$x_1 = \frac{-1+\sqrt5}{2}$ $\quad x_2 = \frac{-1-\sqrt5}{2}$

Проверка: т.к. вычисления в данном случае очень громоздки, то найдем ОДЗ уравнения:

$\begin{cases} 1+x>0 \\ 1-x>0 \\ 2x+3>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x>-1 \\ -x>-1 \\ 2x>3 \end{cases}$; $\begin{cases} x>-1 \\ x<1 \\ x>1{,}5 \end{cases}$



ОДЗ: $x\in(-1;1)\cup(1{,}5;+\infty)$

$x_1\in(-1,1)$ — верно; $x_2\notin(-1;1)\cup(1{,}5;+\infty)$ — неверно.

ж) $\log_{\frac{1}{\sqrt2}}(x-1) - \log_4\sqrt{x-1} = -9$.

Перейдем к основанию 2:

$\log_{\frac{1}{\sqrt2}}(x-1) = \frac{\log_2(x-1)}{\log_2\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)} = \frac{\log_2(x-1)}{\log_2 2^{-\frac12}} = \frac{\log_2(x-1)}{-\frac12} = -2\log_2(x-1)$

$\log_4\sqrt{x-1} = \frac{\log_2\sqrt{x-1}}{\log_2 4} = \frac{\log_2(x-1)^{\frac12}}{2} = \frac{\frac12\log_2(x-1)}{2} = \frac{\log_2(x-1)}{4}$

В итоге получим:

$-2\log_2(x-1) - \frac{\log_2(x-1)}{4} = -9 \mid\cdot(-4)$

$8\log_2(x-1) + \log_2(x-1) = 36$

$9\log_2(x-1)=36$

$\log_2(x-1)=6$, По определению логарифма получим:

$x-1=2^6$

$x-1=64$

$x=65.$

Проверка: Найдем ОДЗ

$x-1>0$; $x>1$ $x\in(1;+\infty)$ - верно.

3) $\log_{16}x+\log_8 x+\log_2 x=\frac{19}{12}$.

Перейдем к основанию 2, т.к. основания логарифмов - степени числа 2:

$\log_{16}x=\frac{\log_2 x}{\log_2 16}=\frac{\log_2 x}{4}$; $\log_8 x=\frac{\log_2 x}{\log_2 8}=\frac{\log_2 x}{3}$

Уравнение примет вид:

$\frac{\log_2 x}{4}+\frac{\log_2 x}{3}+\log_2 x=\frac{19}{12} \mid \cdot 12$

$3\log_2 x+4\log_2 x+12\log_2 x=19$

$19\log_2 x=19$

$\log_2 x=1$.

$x=2^1$

$x=2$.

Проверка: ОДЗ: $x>0 \Rightarrow 2>0$ - верно.

4) $\log_2^2 x^3-\log_2 x^8=1$.

Использовав свойства логарифмов, получим:

$(3\log_2 x)^2-8\log_2 x=1$.

$9\log_2^2 x-8\log_2 x=1$.

Введем новую неизвестную: $y=\log_2 x$; $y^2=\log_2^2 x$

$9y^2-8y=1$

$9y^2-8y-1=0$.

$D=64-4\cdot(-1)\cdot 9=100$; $\sqrt{D}=10$.

$y_1=\frac{8-10}{18}=-\frac{2}{18}=-\frac{1}{9}$ $y_2=\frac{8+10}{18}=1$.

Вернемся к замене:

1) $\log_2 x=-\frac{1}{9}$

$x=2^{-\frac{1}{9}}$

$x_1=\frac{1}{\sqrt[9]{2}}$

2) $\log_2 x=+1$

$x=2^{+1}$

$x_2=2$

Проверка: Найдем ОДЗ: $x>0$

$x_1>0$ - верно, $x_2>0$ - верно.

~~Произведение~~ Сумма корней: $x_1+x_2=2+\frac{1}{\sqrt[9]{2}}=\frac{2\sqrt[9]{2}+1}{\sqrt[9]{2}}$.

к) $x^{\log_5 x - 2} = 125$

Данное уравнение является показательно-логарифмическим. Прологарифмируем его по основанию 5:

$\log_5 x^{\log_5 x - 2} = \log_5 125$

$(\log_5 x - 2)\log_5 x = 3.$

Введем новую неизвестную: $y = \log_5 x$

$(y-2)y = 3$

$y^2 - 2y - 3 = 0.$

$y_1 = -1 \quad y_2 = 3.$

Вернемся к замене:

1) $\log_5 x = -1$ 2) $\log_5 x = 3$

$x = 5^{-1}$ $x = 5^3$

$x_1 = \frac{1}{5}$ $x_2 = 125.$

Проверка: найдем ОДЗ: $x > 0 \quad x \neq 1. \Rightarrow x \in (0;1) \cup (1;+\infty)$

$x_1 \in (0;1)$ - верно $x_2 \in (1;+\infty)$ - верно

Сумма корней: $x_1 + x_2 = \frac{1}{5} + 125 = 125\frac{1}{5} = 125{,}2.$

л) $\log_{x-2}(4x^2 - 14x + 7) = 2$

По определению логарифма получим:

$4x^2 - 14x + 7 = (x-2)^2$

$4x^2 - 14x + 7 = x^2 - 4x + 4$

$4x^2 - 14x + 7 - x^2 + 4x - 4 = 0.$

$3x^2 - 10x + 3 = 0.$

$D = 100 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 64; \sqrt{D} = 8$

$x_1 = \frac{10+8}{6} = 3 \quad x_2 = \frac{10-8}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$

Проверка:

$x = 3$: $\log_{3-2}(4 \cdot 3^2 - 14 \cdot 3 + 7) = 2$

$\log_1(36 - 42 + 7) = 2$ - нет смысла, т.к. основание логарифма не может быть равно 1.

$x = \frac{1}{3}$: $\log_{\frac{1}{3}-2}\left(4 \cdot \frac{1}{9} - 14 \cdot \frac{1}{3} + 7\right) = 2$

$\log_{-1\frac{2}{3}}\left(\frac{4}{9} - \frac{14}{3} + 7\right) = 2$ - нет смысла, т.к. основание логарифма не может быть отрицательным.

м) $\log_2(4 \cdot 3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1.$

По формуле логарифма разности получим:

$\log_2 \frac{4 \cdot 3^x - 6}{9^x - 6} = 1.$

$$\frac{4\cdot 3^x-6}{9^x-6}=2^1 \mid \cdot(9^x-6)$$

$4\cdot 3^x-6=2(9^x-6)$

$4\cdot 3^x-6=2\cdot 9^x-12$

$2\cdot 9^x-12-4\cdot 3^x+6=0$

$2\cdot 9^x-4\cdot 3^x-\overset{6}{\cancel{18}}=0 \mid :2$

$9^x-2\cdot 3^x-3=0$

Введем новую неизвестную: $y=3^x$; $9^x=3^{2x}=y^2$

$y^2-2y-3=0$

$y_1=-1 \quad y_2=3.$

Вернемся к замене:

1) $3^x=3$ 2) $3^x=-1$ – нет смысла

$x=1$

Проверка:

$\log_2(4\cdot 3^1-6)-\log_2(9^1-6)=1$

$\log_2 6-\log_2 3=1$

$\log_2 \frac{6}{3}=1$

$\log_2 2=1$; $1=1$ – верно.

④ Логарифмические неравенства.

а) $\log_5(2x-7)<3$ - указать наименьшее целое решение

б) $\log_{0,3}(6-x)\geqslant -1$ - указать наибольшее целое решение.

в) $\log_3\frac{2-3x}{x}\geqslant -1$ - указать число целых решений.

г) $\log_5(4x-3)<\log_5(3-2x)$ - указать наибольшее целое решение.

д) $\lg(27-x)+\lg(x-2)<2$ - указать число целых решений.

е) $\lg^2x-\lg x>6$. - указать наименьшее целое решение

ж) $\log_{0,3}\log_6\frac{x^2+x}{4+x}\geqslant 0$.

Решение.

а) Представим 3 в правой части как $\log_5 125$. Неравенство примет вид

$\log_5(2x-7)<\log_5 125$, т.к $5>1$:

$2x-7<125$

$2x<132$

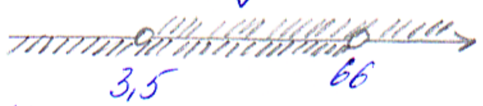
$x<66$

Найдем ОДЗ: $2x-7>0$

$2x>7$

$x>3,5$

В итоге получим.



$x\in(3,5;66)$

Наименьшим целым числом из этого промежутка является $x=4$.

б) $\log_{0,3}(6-x)\geqslant -1$

Представим -1 как $\log_{0,3}0,3^{-1}=\log_{0,3}\frac{10}{3}$. Неравенство примет вид:

$\log_{0,3}(6-x)\geqslant\log_{0,3}\frac{10}{3}$; т.к $0<0,3<1$, то.

$6-x\leqslant\frac{10}{3}\,|\cdot 3$.

$18-3x\leqslant 10$

$-3x\leqslant -8$

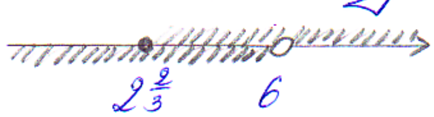
$x\geqslant\frac{8}{3}$; $x\geqslant 2\frac{2}{3}$

Найдем ОДЗ: $6-x>0$

$-x>-6$

$x<6$.

Окончательно получим:



$x \in [2\frac{2}{3}; 6)$

Наибольшим целым числом из этого промежутка является $x = 5$.

в) $\log_3 \frac{2-3x}{x} \geq -1$

Представим -1 как $\log_3 3^{-1} = \log_3 \frac{1}{3}$. Получим:

$\log_3 \frac{2-3x}{x} \geq \log_3 \frac{1}{3}$; т.к. $3 > 1$, то:

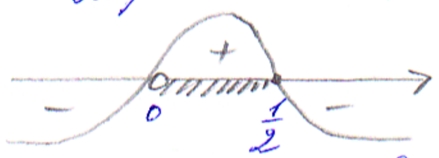
$\frac{2-3x}{x} \geq \frac{1}{3}$

$\frac{2-3x}{x} - \frac{1}{3} \geq 0$

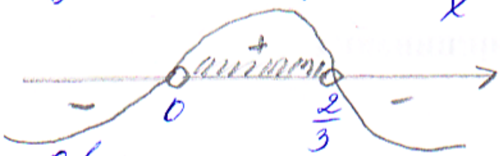
$\frac{2-3x-x}{3x} \geq 0$

$\frac{2-4x}{3x} \geq 0.$

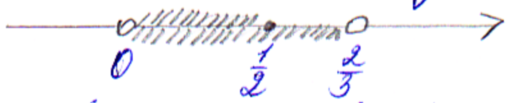
Корни $x = 0$; $2 - 4x = 0$; $4x = 2$; $x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$



Найдем ОДЗ: $\frac{2-3x}{x} > 0$. Корни $x = 0$; $x = \frac{2}{3}$



Окончательно получим:



$x \in (0; \frac{1}{2}]$; Целых решений нет, $n = 0$.

г) $\log_5 (4x-3) < \log_5 (3-2x)$, т.к $5 > 1$, то:

$4x - 3 < 3 - 2x$

$4x + 2x < 3 + 3$

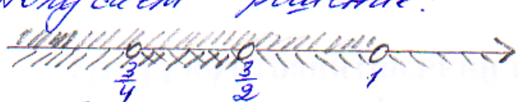
$6x < 6$

$x < 1.$

Найдем ОДЗ:

$\begin{cases} 4x - 3 > 0 \\ 3 - 2x > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x > 3 \\ -2x > -3 \end{cases}$ $\begin{matrix} x > \frac{3}{4} \\ x < \frac{3}{2} \end{matrix}$

Получаем решение:



$x \in (\frac{3}{4}; \frac{3}{2})$

Наибольшим целым числом из этого промежутка является $x = 1$.

д) $\lg(27-x)+\lg(x-2)<2$.

По формуле логарифма суммы получим:

$\lg[(27-x)(x-2)]<2$.

Представим 2 как $\lg 10^2=\lg 100$

$\lg[(27-x)(x-2)]<\lg 100$, т.к. $10>1$, то:

$(27-x)(x-2)<100$

$27x-54-x^2+2x-100<0$.

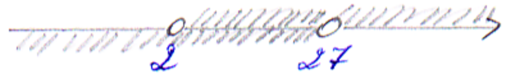
$-x^2+29x-154<0$.

$x^2-29x+154>0$.

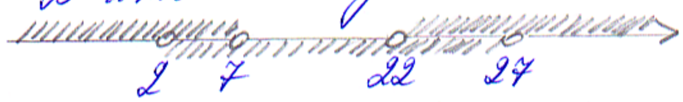
$D=29^2-4\cdot 1\cdot 154=841-616=225$; $\sqrt{D}=15$.

$x_1=\frac{29+15}{2}=22$ $\quad x_2=\frac{29-15}{2}=7$.

Найдем ОДЗ: $\begin{cases}27-x>0\\ x-2>0\end{cases}$ $\begin{cases}-x>-27\\ x>2\end{cases}$ $\begin{cases}x<27\\ x>2\end{cases}$



В итоге получим:



$x\in(2;7)\cup(22;27)$

Число целых решений: $n=8$.

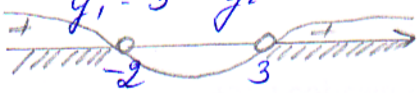
е) $\lg^2 x-\lg x>6$.

Введем новую неизвестную: $y=\lg x$; $y^2=\lg^2 x$

$y^2-y>6$

$y^2-y-6>0$.

$y_1=3$ $\quad y_2=-2$



$y\in(-\infty;-2)\cup(3;+\infty) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y<-2\\ y>3\end{array}\right.$

Решим в отдельности каждое неравенство совокупности.

1) $\lg x<-2$

$\lg x<\lg 10^{-2}$

$\lg x<\lg 0{,}01$, т.к. $10>1$

$x<0{,}01$

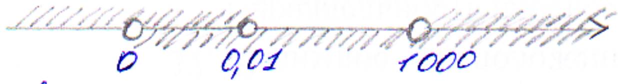
2) $\lg x>3$

$\lg x>\lg 10^3$

$\lg x>\lg 1000$

$x>1000$.

ОДЗ: $x>0$. В итоге получим



$x\in(0;0{,}01)\cup(1000;+\infty)$

Наименьшим целым решением будет: $x=1001$

ж) $\log_{0,3} \log_6 \frac{x^2+x}{4+x} \geq 0.$

Представим 0 как $\log_{0,3} 1$:

$$\log_{0,3} \log_6 \frac{x^2+x}{4+x} \geq \log_{0,3} 1$$ т.к. $0<0,3<1$, то:

$$\log_6 \frac{x^2+x}{4+x} \leq 1.$$

Представим 1 как $\log_6 6$:

$$\log_6 \frac{x^2+x}{4+x} \leq \log_6 6$$, т.к. $6>1$, то

$$\frac{x^2+x}{4+x} \leq 6, \quad x \neq -4.$$

$$\frac{x^2+x}{4+x} - 6 \leq 0$$

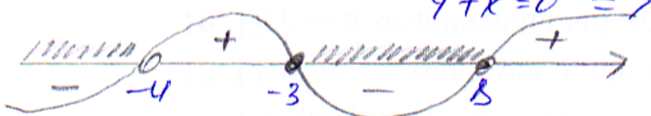
$$\frac{x^2+x-6(4+x)}{4+x} \leq 0$$

$$\frac{x^2+x-24-6x}{4+x} \leq 0.$$

$$\frac{x^2-5x-24}{4+x} \leq 0.$$

Найдем корни: $x^2-5x-24=0 \Rightarrow x_1=8,\ x_2=-3.$

$4+x=0 \Rightarrow x_3=-4$



Найдем ОДЗ: $\begin{cases} \frac{x^2+x}{4+x} > 0 \\ \log_6 \frac{x^2+x}{4+x} > 0 \end{cases}$ Решим каждое неравенство в отдельности.

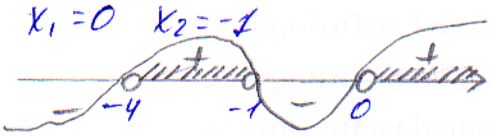
$$\frac{x^2+x}{4+x} > 0$$

Корни:

$x^2+x=0$ $\quad 4+x=0$

$x(x+1)=0$ $\quad x_3=-4$

$x_1=0 \quad x_2=-1$



$$\log_6 \frac{x^2+x}{4+x} > 0$$

$$\log_6 \frac{x^2+x}{4+x} > \log_6 1$$

$$\frac{x^2+x}{4+x} > 1$$

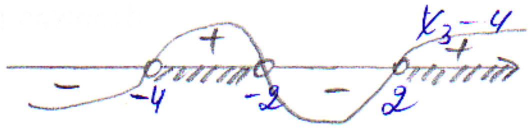
$$\frac{x^2+x}{4+x} - 1 > 0$$

$$\frac{x^2+x-4-x}{4+x} > 0$$

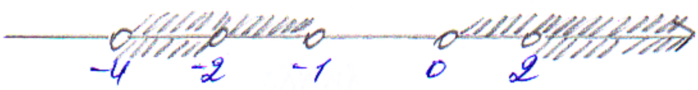
$\frac{x^2-4}{4+x} > 0$; Корни $x_1=-2$

$x_2=2$

$x_3=-4$

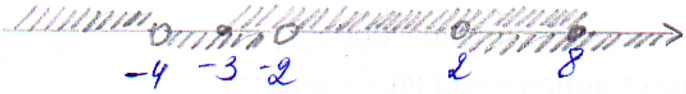


Решение системы получится в виде:



ОДЗ: $x \in (-4;-2) \cup (2;+\infty)$

Объединив с решением неравенства, получим:



$x \in [-3;-2) \cup (2;8]$

Задачи для самостоятельного решения.

① Упрощение логарифмических выражений:

а) $2\log_3 \sqrt[3]{3} - \log_3 \frac{1}{81} + \log_{169} 13$

б) $\log_{14} \sqrt[4]{14} - 2\log_7 \frac{1}{343} + \lg 1000$

в) $\log_5 8 - \log_5 2 + \log_5 \frac{25}{4}$

г) $\log_2 \sqrt{3} + \frac{1}{2}\log_2 \frac{4}{3}$

д) $\log_2 5 + \log_2 56 - \log_2 35$

е) $2\log_7 32 - \log_7 256 - 2\log_7 14$

ж) $\frac{1}{2}\log_4 \frac{25}{81} + \log_4 36 + \log_4 \frac{1}{5}$

з) $2\log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400 + 3\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45}$

и) $\dfrac{\log_7 14 - \frac{1}{3}\log_7 56}{\log_6 30 - \frac{1}{2}\log_6 150}$

к) $\dfrac{3\log_7 2 - \frac{1}{2}\log_7 64}{4\log_5 2 + \frac{1}{3}\log_5 27}$

л) $9^{\log_{81} 4}$

м) $49^{\log_7 10}$

н) $2^{\log_8 125}$

о) $49^{1+\log_7 2}$

п) $81^{\log_9 2 - \log_3 \sqrt[4]{2}}$

р) $\left(\log_2 12 - \log_2 3 + 9^{\log_9 8}\right)^{\lg 17}$

② Переход к новому основанию логарифма:

а) $\log_{2\sqrt{2}} 512$

б) $\log_{\frac{1}{25}} \frac{625}{\sqrt[4]{5}}$

в) $\dfrac{\log_7 8}{\log_7 15 - \log_7 30}$

г) $\left(\log_7 2 + \frac{1}{\log_5 7}\right)\cdot \lg 7$

д) $3^{\frac{1}{\log_8 27}}$

е) $9^{-\frac{2}{\log_2 9}}$

ж) $49^{\frac{1}{2\log_9 7}}$

з) $6^{\frac{6}{\log_{\sqrt{2}} 6} + \frac{1}{3\log_{27} 6}}$

и) $\log_9 17 \cdot \log_{17} 7 \cdot \log_7 3$

к) $\log_3 10 \cdot \lg 11 \cdot \log_{11} 12 \cdot \log_{12} 27$

л) Найти $\log_9 15$, если $\log_{45} 25 = a$

м) Найти $\log_6 16$, если $\log_{12} 2 = a$

н) Найти $\log_{30} 8$, если $\log_{30} 3 = a$ и $\log_{30} 5 = b$.

③ Логарифмические уравнения.

Решить уравнения. Если уравнение имеет несколько корней, в ответе указать их сумму.

а) $\log_{0,1}(x+7) = -1$

б) $\log_{\frac{1}{81}}(x^2+26x) = -\frac{3}{4}$

в) $\log_{\frac{3}{5}} \frac{2x+3}{x-2} = 1$

г) $\lg(x^2-x) = 1 - \lg 5$

д) $\log_{25}(x^2+10x+114) = 1{,}5$

е) $\log_5(x-4) + \log_5 x = 1$.

ж) $\log_2(4-x)+\log_2(1-2x)=2\log_2 3$

з) $\lg(3x-1)-\lg(x+5)=\lg 5$

и) $\log_7(2x^2-7x+6)-\log_7(x-2)=\log_7 x$

к) $\log_2^2 x-5\log_2 x+6=0$

л) $\lg^2 x^4-\lg x^{14}=2$

м) $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=\frac{11}{12}$

н) $\log_3 x+\log_{\sqrt{3}} x+\log_{\frac{1}{3}} x=6$

о) $\log_{\frac{1}{9}}\sqrt{x+1}+\log_{27}(x+1)=\frac{2}{3}$

п) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(x+2)+2\log_{25}(x+2)=-2$

р) $x^{\lg x+2}=1000$

с) $x^{\log_2 x+2}=256$

т) $\log_4(5^x-4)+\log_4(5^x-1)=1.$

4 Логарифмические неравенства

а) $\log_5(3-8x)>0$ – указать наибольшее целое решение

б) $\log_{\frac{1}{3}}(7-x)\geq -2$ – указать наибольшее целое решение

в) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x-2)>-2$ – указать наибольшее целое решение

г) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+1)<2$ – указать наименьшее целое решение.

д) $\log_2(2x-1)>\log_2(x+1)$ – указать наименьшее целое решение

е) $\log_{\frac{1}{5}}(3x-5)>\log_{\frac{1}{5}}(x+1)$ – указать наименьшее целое решение.

ж) $\log_2(x-3)+\log_2(x-2)\leq 1$ – указать число целых решений

з) $\log_{\frac{1}{3}}(x-2)+\log_{\frac{1}{3}}(12-x)\geq -2$ – указать число целых решений

и) $2\log_5^2 x-\log_5 x\leq 3$ – указать число целых решений

к) $\log_{\frac{1}{5}}^2(x-1)+6>5\log_{\frac{1}{5}}(x-1)$ – указать наименьшее целое решение.

л) $\log_{\frac{1}{3}}\log_2\frac{x-1}{2-x}\geq -1$

м) $\log_{\frac{1}{2}}\log_3\frac{x-2}{1-x}>-1.$