Показательные уравнения и неравенства

① Показательные уравнения.

Решить уравнения. Если уравнение имеет несколько корней, в ответ записать их сумму.

а) $5^{x^2-5x-14}=1$ б) $\left(\frac{3}{2}\right)^{1-2x}=\left(\frac{8}{27}\right)^{x+3}$

в) $\left(\frac{4}{5}\right)^x\cdot\left(\frac{35}{12}\right)^x=\frac{9}{49}$ г) $2\cdot 7^{x+1}-6\cdot 7^{x-1}-7^x=85.$

д) $6^{x+1}+6^x=2^x+2^{x+1}+2^{x+2}$ е) $49^{x+1}+55\cdot 7^{x+1}=56$

ж) $7^{2x+1}+4\cdot 21^x-3^{2x+1}=0$

з) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x=10$

Решение:

а) Представим 1 как 5^0. Получим:

$5^{x^2-5x-14}=1$

$5^{x^2-5x-14}=5^0$

$x^2-5x-14=0$

$x_1=7 \quad x_2=-2$

Сумма корней $x_1+x_2=7+(-2)=5.$

б) Приведем правую и левую части к основанию $\frac{3}{2}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{1-2x}=\left(\frac{8}{27}\right)^{x+3}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{1-2x}=\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^{x+3}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{1-2x}=\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}\right)^{x+3}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{1-2x}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-3x-9}$

$1-2x=-3x-9$

$-2x+3x=-9-1$

$x=-10.$

в) Используя тождество $a^x\cdot b^x=(a\cdot b)^x$, получим.

$\left(\frac{4}{5}\right)^x\cdot\left(\frac{35}{12}\right)^x=\frac{9}{49}$

$\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{35}{12}\right)^x=\frac{9}{49}$

$\left(\frac{7}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{7}\right)^2$

$\left(\frac{7}{3}\right)^x = \left(\frac{7}{3}\right)^{-2}$

$x = -2$

г) $2 \cdot 7^{x+1} - 6 \cdot 7^{x-1} - 7^x = 85$

Представим сумму и разность показателей в виде произведения и частного степенных выражений.

$2 \cdot 7^x \cdot 7^1 - \frac{6 \cdot 7^x}{7} - 7^x = 85$

Вынесем общий множитель 7^x за скобки:

$7^x \left(2 \cdot 7 - \frac{6}{7} - 1\right) = 85$

$7^x \left(13 - \frac{6}{7}\right) = 85$

$7^x \cdot 12\frac{1}{7} = 85$

$7^x \cdot \frac{85}{7} = 85 \,\Big|\, : \frac{85}{7}$

$7^x = \frac{85 \cdot 7}{85}$

$7^x = 7^1$

$x = 1.$

д) $6^{x+1} + 6^x = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$

Представим выражения в левой и правых частях в виде произведений степенных выражений, после чего вынесем за скобки общий множитель.

$6^x \cdot 6 + 6^x = 2^x + 2^x \cdot 2 + 2^x \cdot 2^2$

$6^x(6+1) = 2^x(1+2+4)$

$6^x \cdot 7 = 2^x \cdot 7 \,\Big|\, : 7$

$6^x = 2^x$. Разделим на $2^x \neq 0$.

$\frac{6^x}{2^x} = 1$

$\left(\frac{6}{2}\right)^x = 1$

$3^x = 3^0$

$x = 0.$

е) $49^{x+1}+55\cdot 7^{x+1}=56$

Т.к. $49=7^2$, тогда $49^{x+1}=(7^{x+1})^2$. Введем новую неизвестную $y=7^{x+1}$.

$y^2+55y=56$

$y^2+55y-56=0$

$y_1=-56 \quad y_2=1$

Вернемся к замене:

1) $7^{x+1}=-56$ – нет смысла, т.к. $7^x>0$.

2) $7^{x+1}=1$

$7^{x+1}=7^0$

$x+1=0$

$x=-1$.

ж) $7^{2x+1}+4\cdot 21^x-3^{2x+1}=0$

Представим 7^{2x+1} как $7^{2x}\cdot 7$, 3^{2x+1} как $3^{2x}\cdot 3$, а 21^x как $7^x\cdot 3^x$

$7^{2x}\cdot 7+4\cdot 3^x\cdot 7^x-3^{2x}\cdot 3=0$

Данное уравнение является однородным, т.к. представляет собой сумму одночленов одной степени $2x$.

Разделим обе части на 3^{2x}

$\frac{7^{2x}\cdot 7}{3^{2x}}+\frac{4\cdot 3^x\cdot 7^x}{3^{2x}}-\frac{3^{2x}\cdot 3}{3^{2x}}=0$

$7\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^{2x}+4\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^x-3=0$.

Введем новую неизвестную: $\left(\frac{7}{3}\right)^x=y$; $\left(\frac{7}{3}\right)^{2x}=y^2$

$7y^2+4y-3=0$

$D=16-4\cdot 7\cdot(-3)=16+84=100$; $\sqrt{D}=10$

$y_1=\frac{-4+10}{14}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$; $y_2=\frac{-4-10}{14}=-1$.

Вернемся к старой неизвестной:

1) $\left(\frac{7}{3}\right)^x=\frac{3}{7}$

$\left(\frac{7}{3}\right)^x=\left(\frac{7}{3}\right)^{-1}$

$x=-1$

2) $\left(\frac{7}{3}\right)^x = -1$ - нет смысла

3) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10$

Заметим, что основания степеней являются сопряженными числами. Найдем их произведение:

$\sqrt{5+2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{5^2-(2\sqrt{6})^2} = \sqrt{25-4\cdot 6} = \sqrt{1} = 1.$

Т.к. $\sqrt{5+2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{5-2\sqrt{6}} = 1$, то $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}$

С учетом этого, получим:

$\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \frac{1}{\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x} = 10$

Введем новую неизвестную: $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x = y$

$y + \frac{1}{y} = 10 \quad | \cdot y$

$y^2 + 1 = 10y$

$y^2 - 10y + 1 = 0$

$D = 100 - 4\cdot 1 = 96; \quad \sqrt{D} = \sqrt{96} = \sqrt{16\cdot 6} = 4\sqrt{6}.$

$y_1 = \frac{10+4\sqrt{6}}{2} = \frac{2(5+2\sqrt{6})}{2} = 5+2\sqrt{6}$

$y_2 = \frac{10-4\sqrt{6}}{2} = \frac{2(5-2\sqrt{6})}{2} = 5-2\sqrt{6}$

Вернемся к старой неизвестной:

1) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x = 5+2\sqrt{6}$

$\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x = \left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^2$

$x_1 = 2$

2) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x = 5-2\sqrt{6}$

$\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x = \left(\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}\right)^2$ (См. рассуждения выше)

$\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x = \left(\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{-1}\right)^2$

$\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x = \left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{-2}$

$x_2 = -2$

Сумма корней $x_1 + x_2 = 2 + (-2) = 0.$

② Показательные неравенства

Решить неравенства

а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5-3x} \le 81.$ – указать наибольшее целое решение.
~~Указать наи~~

б) $5^{\frac{x+1}{3}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ – указать наибольшее целое решение

в) $\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2} > \left(\frac{9}{49}\right)^{x+1,5}$ – указать наименьшее целое решение.

г) $0,5^{x-1} + 0,5^{x+1} > 26$ – указать наибольшее целое решение

д) $5^{x+1} - 3^{x+2} < 2\cdot 5^x - 2\cdot 3^{x-1}$ – указать наименьшее целое решение.

е) $9^{x+1} - 3^{x+3} < 3^x - 3$ – указать наименьшее целое решение.

ж) $2^{2x+1} - 5\cdot 6^x + 3^{2x+1} \geq 0.$ з) $2^{x^2+x+1} - 3^{x^2+x} > 3^{x^2+x-1} - 2^{x^2+x}$

Решение.

а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5-3x} \le 81.$

Приведем обе части к основанию 3.

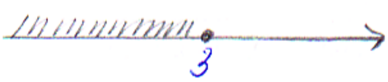
$\left(3^{-1}\right)^{5-3x} \le 3^4$

$3^{3x-5} \le 3^4$; т.к. $3>1$, то:

$3x-5 \le 4$

$3x \le 9$

$x \le 3.$



$x \in (-\infty; 3]$

Наибольшим целым числом из этого промежутка является $x=3$.

б) $5^{\frac{x+1}{3}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$

Приведем правую часть к основанию 5

$5^{\frac{x+1}{3}} \geq \frac{1}{(5)^{\frac{1}{3}}}$

$5^{\frac{x+1}{3}} \geq 5^{-\frac{1}{3}}$, т.к. $5>1$, то:

$\frac{x+1}{3} \geq -\frac{1}{3} \quad |\cdot 3$

$x+1 \geq -1$

$x \geq -2.$

$x \in (-\infty; -2]$

Наибольшим целым числом из этого промежутка является $x = -2$.

в) $\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2} > \left(\frac{9}{49}\right)^{x+1,5}$

Приведем правую и левую части к основанию $\frac{3}{7}$

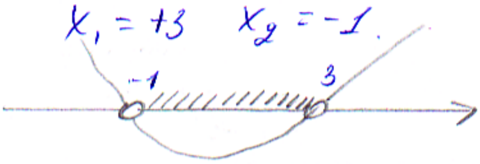
$\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2} > \left(\left(\frac{3}{7}\right)^2\right)^{x+1,5}$

$\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2} > \left(\frac{3}{7}\right)^{2x+3}$, т.к. $0 < \frac{3}{7} < 1$, то:

$x^2 < 2x+3$

$x^2 - 2x - 3 < 0$

$x_1 = +3 \quad x_2 = -1$.



$x \in (-1; 3)$

Наименьшим целым числом из этого промежутка является $x=0$.

г) $0,5^{x-1} + 0,5^{x+1} > 26$

$\frac{0,5^x}{0,5} + 0,5^x \cdot 0,5 > 26$ Вынесем множитель $0,5^x$ за скобки.

$0,5^x\left(\frac{1}{0,5} + 0,5\right) > 26$

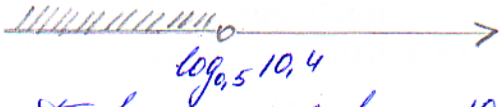
$0,5^x(2 + 0,5) > 26$

$0,5^x \cdot 2,5 > 26 \,|: 2,5$

$0,5^x > 10,4$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 10,4$, т.к. $0 < 0,5 < 1$, то:

$x < \log_{0,5} 10,4$.



$x \in (-\infty; \log_{0,5} 10,4)$

Т.к. $-4 < \log_{0,5} 10,4 < -3$, то наибольшим целым числом из этого промежутка будет $x = -4$.

д) $5^{x+1}-3^{x+2}<2\cdot5^{x}-2\cdot3^{x-1}$

Соберем в левой части степени с основанием 5, а в правой – с основанием 3.

$5^{x+1}-2\cdot5^{x}<3^{x+2}-2\cdot3^{x-1}$

$5^{x}\cdot5-2\cdot5^{x}<3^{x}\cdot3^{2}-\frac{2\cdot3^{x}}{3}$

Вынесем за скобки общие множители: 5^x – в левой части, 3^x – в правой части.

$5^{x}(5-2)<3^{x}(9-\frac{2}{3})$

$5^{x}\cdot3<3^{x}\cdot8\frac{1}{3}$

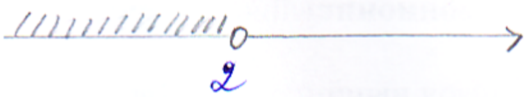
$5^{x}\cdot3<3^{x}\cdot\frac{25}{3}\ \Big|:3$

$5^{x}<3^{x}\cdot\frac{25}{9}\ \Big|:3^{x}>0.$

$\left(\frac{5}{3}\right)^{x}<\frac{25}{9}$ Приведем $\frac{25}{9}$ к основанию $\frac{5}{3}$

$\left(\frac{5}{3}\right)^{x}<\left(\frac{5}{3}\right)^{2}$, т.к. $\frac{5}{3}>1$, то:

$x<2$



$x\in(-\infty;2)$

Наибольшим целым числом из этого промежутка является $x=1$.

е) $9^{x+1}-3^{x+3}<3^{x}-3$.

Приведем к основанию степени 3:

$9\cdot9^{x}-3^{x}\cdot3^{3}<3^{x}-3$

$9\cdot9^{x}-27\cdot3^{x}-3^{x}+3<0$

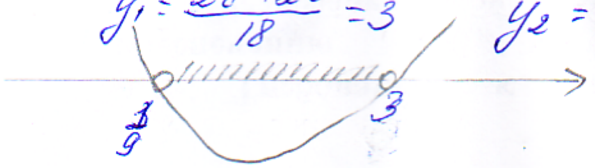
$9\cdot3^{2x}-28\cdot3^{x}+3<0.$

Введем новую неизвестную: $y=3^{x}$; $3^{2x}=y^{2}$.

$9y^{2}-28y+3<0$

$D=784-4\cdot3\cdot9=676$; $\sqrt{D}=26$.

$y_1=\frac{28+26}{18}=3$ $y_2=\frac{28-26}{18}=\frac{1}{9}.$



$y\in(\frac{1}{9};3)\Rightarrow\begin{cases}y>\frac{1}{9}\\ y<3.\end{cases}$

Вернемся к старой неизвестной; получим

$\begin{cases} 3^x > \frac{1}{9} \\ 3^x < 3 \end{cases}$; $\begin{cases} 3^x > 3^{-2} \\ 3^x < 3^1 \end{cases}$ $\begin{cases} x > -2 \\ x < 1 \end{cases}$ (т.к. $3 > 1$).

$x \in (-2; 1)$

Наименьшим целым числом из этого промежутка является $x = -1$.

ж(с) $2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3^{2x+1} \geq 0$. т.к. $6^x = 2^x \cdot 3^x$, получим.

$2^{2x} \cdot 2 - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x + 3^{2x} \cdot 3 \geq 0$.

Неравенство является однородным, разделим на $3^{2x} \neq 0$.

$\frac{2^{2x} \cdot 2}{3^{2x}} - \frac{5 \cdot 2^x \cdot 3^x}{3^{2x}} + \frac{3^{2x} \cdot 3}{3^{2x}} \geq 0$.

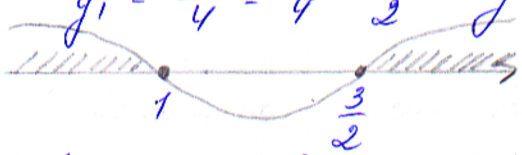
$2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3 \geq 0$.

Введем новую неизвестную: $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = y^2$

$2y^2 - 5y + 3 \geq 0$

$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$ $\sqrt{D} = 1$.

$y_1 = \frac{5+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ $y = \frac{5-1}{4} = 1$.



$y \in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y < 1 \\ y > \frac{3}{2} \end{array}\right.$

Вернемся к старой неизвестной:

$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^x \leq 1 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x \geq \frac{3}{2} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^x \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \leq -1 \end{array}\right.$

$x \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$

з) $2^{x^2+x+1} - 3^{x^2+x} > 3^{x^2+x-1} - 2^{x^2+x}$

Для упрощения решения введем замену: $y = x^2 + x$, получим:

$2^{y+1} - 3^y > 3^{y-1} - 2^y$

Степени с основанием 2 соберем в левой части неравенства, а степени с основанием 3 – в правой:

$2^{y+1} + 2^y > 3^{y-1} + 3^y$

$2^y \cdot 2 + 2^y > 3^y \cdot \frac{1}{3} + 3^y$

$2^y(2+1) > 3^y(1 + \frac{1}{3})$

$3\cdot 2^y > 3^y\cdot\frac{4}{3} \quad |:3$

$2^y > 3^y\cdot\frac{4}{9} \quad |:3^y>0$

$\left(\frac{2}{3}\right)^y > \frac{4}{9}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^y > \left(\frac{2}{3}\right)^2$

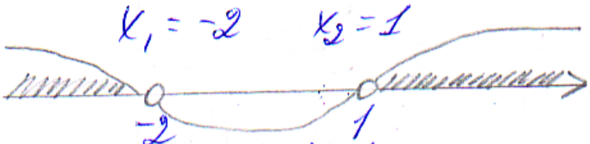
$y>2$

Вернемся к замене:

$x^2+x>2$

$x^2+x-2>0.$

$x_1=-2 \qquad x_2=1$



$x\in(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$

Задачи для самостоятельного решения:

① Показательные уравнения:

а) Решить уравнение. Если уравнение имеет несколько корней, в ответе указать их сумму.

а) $\left(3^{x-2}\right)^{x-4} = \frac{1}{3}$ б) $19^{x^2-4x-21} = 1$

в) $2^{x^2-6x-1,5} = 32\sqrt{2}$ г) $\left(\frac{18}{49}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^{x-1} = \frac{343}{8}$

д) $\left(\frac{9}{8}\right)^{x}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = \frac{64}{27}$ е) $3^{x+3}+3^{x}=84$

ж) $4^{x+2}+6\cdot 4^{x-1}=70$ з) $7^{x+2}-2\cdot 7^{x+1}+5\cdot 7^{x}=280$

и) $3^{x+2}+3^{x+1}-4\cdot 3^{x}=7^{x}+7^{x+1}$ к) $3^{x}-2^{x+4}=3^{x-1}-55\cdot 2^{x-2}$

л) $49^{x}-6\cdot 7^{x}=7$ м) $2^{2x+1}+3\cdot 2^{x}=2$

н) $3^{2x+1}-2\cdot 15^{x}-5^{2x+1}=0$ о) $5\cdot 4^{x}-7\cdot 10^{x}+2\cdot 25^{x}=0$.

п) $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^{x}+\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^{x}=6$

р) $\left(\sqrt{9-4\sqrt{5}}\right)^{x}+\left(\sqrt{9+4\sqrt{5}}\right)^{x}=18$.

② Показательные неравенства.

а) $6^{2x}\le\frac{1}{36}$ – указать наибольшее целое решение

б) $0,6^{x^2+3x}\ge 1$ – указать наибольшее целое решение

в) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3-x}<25$ – указать наибольшее целое решение

г) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+4x}\ge\left(\frac{8}{27}\right)^{x+2}$ – указать наименьшее целое решение.

д) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2+1}>\left(\frac{1}{32}\right)^{2x}$ – указать наименьшее целое решение

е) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2x-7}{x+1}}\ge\frac{5}{2}$ – указать наименьшее целое решение.

ж) $3^{x+2}+3^{x-1}<28$ – указать наибольшее целое решение

з) $5^{3x+1}-5^{3x-3}\le 624$ – указать наибольшее целое решение

и) $3^{x}+10^{x-2}>10^{x-3}+19\cdot 3^{x-2}$ – указать наименьшее целое решение

к) $7^{x+2}-8^{x+2}<6\cdot 7^{x+1}-7\cdot 8^{x+1}$ – указать наименьшее целое решение

л) $2^{x+3}+3\cdot 5^{x}<3\cdot 2^{x}+5^{x+1}$ – указать наименьшее целое решение

м) $4^{x}-3\cdot 2^{x}+2\le 0$ – указать наименьшее целое решение

н) $5^{2x+1}-5^{x+2}<5^{x}-5$ – указать наименьшее целое решение.

о) $3^{2x+2}-3^{x+4}<3^x-9$ - указать наименьшее целое решение

п) $3\cdot 16^x+2\cdot 81^x-5\cdot 36^x\leq 0$

р) $5\cdot 25^x+3\cdot 10^x\geq 2\cdot 4^x$

с) $3^{2x^2-x+2}-5^{2x^2-x-1}\geq 5^{2x^2-x+1}+3^{2x^2-x-1}$