Корень N-ой степени. Степень с дробным показателем. Иррациональные уравнения и неравенства.

Примеры решения задач.

(1) Корень n-ой степени и его свойства.

Найти значение выражения:

а) $\sqrt[4]{26+\sqrt{51}}\cdot\sqrt[4]{26-\sqrt{51}}$

б) $\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}$

в) $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}$

г) $\dfrac{\sqrt[3]{(4+\sqrt{17})^2}}{\sqrt[3]{4-\sqrt{17}}}+\sqrt{17}$

д) $\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})}$

е) Известно, что $x=\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$. Чему равно значение выражения $\frac{1}{3}x^3-x$

ж) $(2-\sqrt{3})\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$

Решение.

а) Поскольку $\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{xy}$, то получим

$$\sqrt[4]{26+\sqrt{51}}\cdot\sqrt[4]{26-\sqrt{51}}=\sqrt[4]{(26+\sqrt{51})(26-\sqrt{51})}=\sqrt[4]{26^2-(\sqrt{51})^2}=\sqrt[4]{676-51}=$$
$$=\sqrt[4]{625}=5.$$

б) Приведем все корни к одному показателю. Для этого используем формулу: $\sqrt[n]{k^m}=\sqrt[nk]{k^{mk}}$.

$$\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}=\frac{\sqrt[6]{3^3}\cdot\sqrt[6]{9^2}}{\sqrt[6]{3}}=\sqrt[6]{\frac{3^3\cdot(3^2)^2}{3}}=\sqrt[6]{\frac{3^3\cdot3^4}{3}}=\sqrt[6]{3^6}=3.$$

в) Приведем корни к одному показателю (в нашем случае - к 6-ой степени)

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}=\sqrt[6]{(2-\sqrt{3})^2}\cdot\sqrt[6]{(7+4\sqrt{3})}=\sqrt[6]{(2-\sqrt{3})^2\cdot(7+4\sqrt{3})}=$$
$$=\sqrt[6]{(4-4\sqrt{3}+3)(7+4\sqrt{3})}=\sqrt[6]{(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})}=\sqrt[6]{49-(4\sqrt{3})^2}=$$
$$=\sqrt[6]{49-48}=\sqrt[6]{1}=1.$$

г) Уничтожим иррациональность в знаменателе. Для этого числитель и знаменатель дроби умножим на $\sqrt[3]{(4-\sqrt{17})^2}$

$$\frac{\sqrt[3]{(4+\sqrt{17})^2}}{\sqrt[3]{(4-\sqrt{17})}}+\sqrt{17}=\frac{\sqrt[3]{(4+\sqrt{17})^2(4-\sqrt{17})^2}}{\sqrt[3]{(4-\sqrt{17})^3}}+\sqrt{17}=\frac{\sqrt[3]{[(4-\sqrt{17})(4+\sqrt{17})]^2}}{4-\sqrt{17}}+$$

$$+\sqrt{17}=\frac{\sqrt[3]{(16-(\sqrt{17})^2)^2}}{4-\sqrt{17}}+\sqrt{17}=\frac{\sqrt[3]{(16-17)^2}}{4-\sqrt{17}}+\sqrt{17}=\frac{1}{4-\sqrt{17}}+\sqrt{17}=$$

$$=\frac{1+\sqrt{17}(4-\sqrt{17})}{4-\sqrt{17}}=\frac{1+4\sqrt{17}-17}{4-\sqrt{17}}=\frac{4\sqrt{17}-16}{4-\sqrt{17}}=\frac{-4(4-\sqrt{17})}{4-\sqrt{17}}=-4.$$

д) Применим для выражения в знаменателе формулу разности квадратов

$$\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})}=\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt[4]{3}^2-\sqrt[4]{2}^2}=\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

Представим выражение $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ как $\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$ ⇒ Получим:

$$\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}}=\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{3-2\sqrt{3}\sqrt{2}+2}}=\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{5-2\sqrt{6}}}=\sqrt{1}=1.$$

е) Пусть $\frac{1}{3}x^3-x=a$. Подставим значение x в это выражение. При преобразовании будем использовать формулу:

$$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$$

$$a=\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^3-\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{3}\Big(\sqrt{3}+\sqrt{2}+$$

$$+3\sqrt[3]{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)+\sqrt{3}-\sqrt{2}\Big)-\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-$$

$$-\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{1}{3}\left(2\sqrt{3}+3\sqrt[3]{3-2}\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)\right)-\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{3}+\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

ж) Введем множитель $2-\sqrt{3}$ под корень, возведя его в куб.

$$(2-\sqrt{3})\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}=\sqrt[3]{(2-\sqrt{3})^3(26+15\sqrt{3})}=\sqrt[3]{(8-3\cdot4\cdot\sqrt{3}+3\cdot2\cdot3-\sqrt{3}^3)(26+15\sqrt{3})}=$$

$$=\cancel{\sqrt[3]{(23-12\sqrt{3})(26+15\sqrt{3})}}=\sqrt[3]{(26-12\sqrt{3}-\sqrt{27})(26+15\sqrt{3})}=\sqrt[3]{(26-12\sqrt{3}-3\sqrt{3})(26+15\sqrt{3})}$$

$$=\sqrt[3]{(26-15\sqrt{3})(26+15\sqrt{3})}=\sqrt[3]{26^2-(15\sqrt{3})^2}=\sqrt[3]{676-675}=\sqrt[3]{1}=1.$$

② Степень с дробным показателем и ее свойства.

Найти значение выражения

а) $16^{-0,75}\cdot 8^{-\frac{5}{12}}\cdot 4^{\frac{5}{8}}$

б) $\left(\dfrac{3^{\frac56}\cdot 2^{\frac56}}{5^{-\frac16}\cdot 6}\right)^{-12}$

в) $\left(\dfrac{8^{\frac12}\cdot 9^{\frac43}}{\cancel{9^{-\frac16}}\,27^{-\frac19}\cdot 2^{\frac12}}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{27^{\frac54}\cdot 16^{\frac15}}{2^{-\frac65}\cdot 81^{\frac{7}{16}}}\right)^{\frac12}$

г) $2\cdot(3-\sqrt5)^{\frac12}\cdot(10^{\frac12}-2^{\frac12})(6+2\sqrt5)$

д) $\left(3^{-\frac13}\cdot 2^{\frac53}-3^{\frac53}\cdot 2^{-\frac13}\right)\cdot 6^{\frac13}$

Решение

а) Приведем все множители к основанию 2:

$16^{-0,75}\cdot 8^{-\frac{5}{12}}\cdot 4^{\frac58}=(2^4)^{-0,75}\cdot(2^3)^{-\frac{5}{12}}\cdot(2^2)^{\frac58}=2^3\cdot 2^{-\frac54}\cdot 2^{\frac54}=$
$=2^{3-\frac54+\frac54}=2^3=8.$

б) $\left(\dfrac{3^{\frac56}\cdot 2^{\frac56}}{5^{-\frac16}\cdot 6}\right)^{-12}=\left(\dfrac{(3\cdot2)^{\frac56}}{5^{-\frac16}\cdot 6}\right)^{-12}=\left(\dfrac{6^{\frac56}}{5^{-\frac16}\cdot 6^1}\right)^{-12}=\left(\dfrac{6^{\frac56-1}}{5^{-\frac16}}\right)^{-12}=$
$=\left(\dfrac{(6)^{-\frac16}}{(5)^{-\frac16}}\right)^{-12}=\left(\left(\dfrac65\right)^{-\frac16}\right)^{-12}=\left(\dfrac65\right)^2=\dfrac{36}{25}=1\dfrac{11}{25}.$

в) Представим выражения вобих скобках в виде степеней с основаниями 2 и 3.

$\left(\dfrac{8^{\frac12}\cdot 9^{\frac43}}{27^{-\frac19}\cdot 2^{\frac12}}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{27^{\frac54}\cdot 16^{\frac15}}{2^{-\frac65}\cdot 81^{\frac{7}{16}}}\right)^{\frac12}=\left(\dfrac{(2^3)^{\frac12}\cdot(3^2)^{\frac43}}{(3^3)^{-\frac19}\cdot 2^{\frac12}}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{(3^3)^{\frac54}\cdot(2^4)^{\frac15}}{2^{-\frac65}\cdot(3^4)^{\frac{7}{16}}}\right)^{\frac12}=$

$=\left(\dfrac{2^{\frac32}\cdot 3^{\frac83}}{3^{-\frac13}\cdot 2^{\frac12}}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{3^{\frac{15}{4}}\cdot 2^{\frac45}}{2^{-\frac65}\cdot 3^{\frac74}}\right)^{\frac12}=\left(2^{\frac32-\frac12}\cdot 3^{\frac83+\frac13}\right)^{-1}\cdot\left(3^{\frac{15}{4}-\frac74}\cdot 2^{\frac45+\frac65}\right)^{\frac12}=$

$=(2\cdot 3^3)^{-1}\cdot(3^2\cdot 2^2)^{\frac12}=54^{-1}\cdot((3\cdot 2)^2)^{\frac12}=\dfrac{6}{54}=\dfrac19.$

г) Перейдём от степеней с дробным показателем к корням:

$$2(3-\sqrt{5})^{\frac{1}{2}}\cdot(10^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{2}})\cdot(6+2\sqrt{5})^{1}=2\cdot\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot(\sqrt{10}-\sqrt{2})\cdot 2\cdot(3+\sqrt{5})=$$

$$=4\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot\sqrt{(3+\sqrt{5})^2}\cdot(\sqrt{10}-\sqrt{2})=4\sqrt{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^2}\cdot(\sqrt{10}-\sqrt{2})=$$

$$=4\sqrt{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}\cdot(\sqrt{10}-\sqrt{2})=4\sqrt{(3^2-(\sqrt{5})^2)(3+\sqrt{5})}\cdot(\sqrt{10}-\sqrt{2})=$$

$$=4\sqrt{4\cdot(3+\sqrt{5})}\,(\sqrt{5\cdot 2}-\sqrt{2})=8\sqrt{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)=8\sqrt{2}\cdot\sqrt{(3+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)^2}=$$

$$=8\sqrt{2}\cdot\sqrt{(3+\sqrt{5})(5-2\sqrt{5}+1)}=8\sqrt{2}\cdot\sqrt{(3+\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})}=8\sqrt{2}\cdot\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})\cdot 2}=$$

$$=8\sqrt{2}\cdot\sqrt{(3^2-\sqrt{5}^2)\cdot 2}=8\sqrt{2}\cdot\sqrt{4\cdot 2}=8\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}=16\cdot 2=32.$$

д) Представим $6^{\frac{1}{3}}$ как произведение $3^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}$ и внесём его в скобки.

$$\left(3^{-\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{5}{3}}-3^{\frac{5}{3}}\cdot 2^{-\frac{1}{3}}\right)\cdot 6^{\frac{1}{3}}=\left(3^{-\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{5}{3}}-3^{\frac{5}{3}}\cdot 2^{-\frac{1}{3}}\right)\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}=$$

$$=3^{-\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{5}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{5}{3}}\cdot 2^{-\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}=3^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{5}{3}+\frac{1}{3}}-3^{\frac{5}{3}+\frac{1}{3}}\cdot 2^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=$$

$$=3^0\cdot 2^2-3^2\cdot 2^0=4\cdot 1-9\cdot 1=-5.$$

3. Упрощение выражений, содержащих корни и степени.

а) $\dfrac{m-3m^{\frac{1}{6}}}{m^{\frac{5}{6}}-3}+\dfrac{n^{\frac{1}{3}}-m^{\frac{1}{3}}}{m^{\frac{1}{6}}+n^{\frac{1}{6}}}$; результат вычислить при $m=-64$; $n=64$

б) $\left(\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{ab}\right):(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^2$; результат вычислить при $a=8$; $b=125$

в) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{ab}}\cdot\dfrac{ab^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$; результат вычислить при $a=216$; $b=-8$.

г) $\left(\dfrac{a-b}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{b}}$; результат вычислить при $a=64$ $b=81$

д) $\dfrac{a+1}{2\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}+a+\frac{1}{a}}$; результат вычислить при $a=9$.

Решение

а) Сократим дроби, предварительно разложив на множители числители и знаменатели:

$$\frac{m-3m^{\frac16}}{m^{\frac56}-3}+\frac{n^{\frac13}-m^{\frac13}}{m^{\frac16}+n^{\frac16}}=\frac{m^{\frac66}-3m^{\frac16}}{m^{\frac56}-3}+\frac{(n^{\frac16})^2-(m^{\frac16})^2}{m^{\frac16}+n^{\frac16}}=$$

$$=\frac{m^{\frac16}(m^{\frac56}-3)}{m^{\frac56}-3}+\frac{(n^{\frac16}+m^{\frac16})(n^{\frac16}-m^{\frac16})}{m^{\frac16}+n^{\frac16}}=m^{\frac16}+n^{\frac16}-m^{\frac16}=n^{\frac16}$$

При $m=64$; $n=64$ получим

$$(64)^{\frac16}=(2^6)^{\frac16}=2$$

б) Сократим дробь в скобках, разложив числитель дроби как сумму кубов.

$$\left(\frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{ab}\right):\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2=\left(\frac{(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{ab}\right):\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{ab}\right):\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2=\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{ab}\right):\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2}=\frac{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2}=1$$

в) Перейдем от корней к степеням с дробным показателем

$$\frac{a^{\frac13}-b^{\frac13}}{\sqrt[3]{ab}}\cdot\frac{ab^{\frac13}-a^{\frac13}b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\frac{a^{\frac13}+b^{\frac13}}{a^{\frac13}b^{\frac13}}\cdot\frac{a^{\frac13}b^{\frac13}(a^{\frac23}-b^{\frac23})}{a^{\frac13}+b^{\frac13}}=a^{\frac23}-b^{\frac23}$$

При $a=216$ $b=-8$ получим

$$216^{\frac23}-(-8)^{\frac23}=(\sqrt[3]{216})^2-(\sqrt[3]{-8})^2=6^2-(-2)^2=36-4=32.$$

г) Сократим дроби в скобках, разложив на множители числители и знаменатели.

$$\left(\frac{a-b}{a^{\frac34}+a^{\frac12}b^{\frac14}}-\frac{a^{\frac12}-b^{\frac12}}{a^{\frac14}+b^{\frac14}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{b}}=\left(\frac{(a^{\frac12})^2-(b^{\frac12})^2}{a^{\frac12}(a^{\frac14}+b^{\frac14})}-\frac{(a^{\frac14})^2-(b^{\frac14})^2}{(a^{\frac14}+b^{\frac14})}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{b}}=$$

$$=\left(\frac{(a^{\frac12}-b^{\frac12})(a^{\frac12}+b^{\frac12})}{a^{\frac12}(a^{\frac14}+b^{\frac14})}-\frac{(a^{\frac14}-b^{\frac14})(a^{\frac14}+b^{\frac14})}{a^{\frac14}+b^{\frac14}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{b}}=\left(\frac{((a^{\frac14})^2-(b^{\frac14})^2)(a^{\frac12}+b^{\frac12})}{a^{\frac12}(a^{\frac14}+b^{\frac14})}-\right.$$

$$\left.-(a^{\frac14}-b^{\frac14})\right)\frac{1}{\sqrt{b}}=\left(\frac{(a^{\frac14}+b^{\frac14})(a^{\frac14}-b^{\frac14})(a^{\frac12}+b^{\frac12})}{a^{\frac12}(a^{\frac14}+b^{\frac14})}-(a^{\frac14}-b^{\frac14})\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{(a^{\frac14}-b^{\frac14})(a^{\frac12}+b^{\frac12})-a^{\frac12}(a^{\frac14}-b^{\frac14})}{a^{\frac12}}\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{(a^{\frac14}-b^{\frac14})(a^{\frac12}+b^{\frac12}-a^{\frac12})}{a^{\frac12}}\cdot\frac{1}{b^{\frac12}}=\frac{(a^{\frac14}-b^{\frac14})\cdot b^{\frac12}}{a^{\frac12}}\cdot\frac{1}{b^{\frac12}}=\frac{a^{\frac14}-b^{\frac14}}{a^{\frac12}}$$

При $a=64$, $b=81$ получим: $\frac{64^{\frac14}-81^{\frac14}}{64^{\frac12}}=\frac{\sqrt[4]{64}-\sqrt[4]{81}}{\sqrt{64}}=\frac{2\sqrt[4]{4}-3}{8}$

д) Вначале упростим выражение, стоящее в знаменателе, а после выполним деление

$$\frac{a+1}{2\sqrt[3]{\sqrt3-\sqrt2}\cdot\sqrt[6]{5+2\sqrt6}+a+\frac1a}$$

1) $2\sqrt[3]{\sqrt3-\sqrt2}\cdot\sqrt[6]{5+2\sqrt6}+a+\frac1a=2\sqrt[6]{(\sqrt3-\sqrt2)^2(5+2\sqrt6)}+a+\frac1a=$

$=2\sqrt[6]{(3-2\sqrt6+2)(5+2\sqrt6)}+a+\frac1a=2\sqrt[6]{(5-2\sqrt6)(5+2\sqrt6)}+a+\frac1a=$

$=2\sqrt[6]{25-(2\sqrt6)^2}+a+\frac1a=2\sqrt[6]{25-24}+a+\frac1a=2+a+\frac1a=\frac{2a+a^2+1}{a}=$

$=\frac{(a+1)^2}{a}$

2) $(a+1):\frac{(a+1)^2}{a}=(a+1)\cdot\frac{a}{(a+1)^2}=\frac{a}{a+1}$

При $a=9$ получим: $\frac{9}{9+1}=\frac{9}{10}=0{,}9$

(4) Иррациональные уравнения.

Решить уравнения. Если уравнение имеет несколько корней, в ответе указать их произведение.

а) $\sqrt{x^2+5x+1}=2x-1$

б) $\sqrt{x-1+\sqrt{x+15}}=2$

в) $\sqrt{3-x}+\frac{6}{\sqrt{3-x}}=\sqrt{9-5x}$

г) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+1}=2.$

д) $\sqrt{4x+9}-\sqrt{x}=\sqrt{x+5}$

е) $x^2+3x+\sqrt{x^2+3x}=6.$

ж) $\sqrt{\frac{2-x}{x+3}}+\sqrt{\frac{x+3}{2-x}}=3\frac13$

з) $\sqrt[3]{x+44}-\sqrt[3]{x-19}=3.$

Решение

а) $\sqrt{x^2+5x+1}=2x-1$; Возведем в квадрат:

$(\sqrt{x^2+5x+1})^2=(2x-1)^2$

$x^2+5x+1=4x^2-4x+1$

$4x^2-4x+1-x^2-5x-1=0$

$3x^2-9x=0$

$3x(x-3)=0$

$3x=0 \quad x-3=0$

$x_1=0 \quad x=3$

Выполним проверку:

а) $x=0$: $\sqrt{0^2+5\cdot 0+1}=2\cdot 0-1$

$\sqrt{1}=-1$

$1\neq -1$ – неверно.

б) $x=3$: $\sqrt{3^2+5\cdot 3+1}=2\cdot 3-1$

$\sqrt{9+15+1}=5$

$\sqrt{25}=5$

$5=5$ – верно.

Произведение корней равно 3 (т.к. корень – единственный)

б) $\sqrt{x-1+\sqrt{x+15}}=2$; возведем в квадрат.

$\left(\sqrt{x-1+\sqrt{x+15}}\right)^2=2^2$

$x-1+\sqrt{x+15}=4$; Уединим корень в левой части.

$\sqrt{x+15}=4+1-x$

$\sqrt{x+15}=5-x$; Снова возведем в квадрат.

$\left(\sqrt{x+15}\right)^2=(5-x)^2$

$x+15=25-10x+x^2$

$x^2-10x+25-x-15=0$

$x^2-11x+10=0$

$x_1=10\quad x_2=1.$

Выполним проверку:

а) $x=10$: $\sqrt{10-1+\sqrt{10+15}}=2$

$\sqrt{9+\sqrt{25}}=2$

$\sqrt{9+5}=2$

$\sqrt{14}\neq 2$ – неверно.

б) $x=1$: $\sqrt{1-1+\sqrt{1+15}}=2$

$\sqrt{0+\sqrt{16}}=2$

$\sqrt{4}=2$

$2=2$ – верно.

Произведение корней равно 1 (т.к. корень единственный)

в) Домножим обе части уравнения на $\sqrt{3-x}$, чтобы освободиться от знаменателя. При этом надо будет учитывать, что $x\neq 3$ в дальнейшем.

$\sqrt{3-x} + \frac{6}{\sqrt{3-x}} = \sqrt{9-5x} \quad | \cdot \sqrt{3-x}$

$3-x+6 = \sqrt{(9-5x)(3-x)}$

$9-x = \sqrt{(9-5x)(3-x)}$; Возведем в квадрат обе части.

$(9-x)^2 = \left(\sqrt{(9-5x)(3-x)}\right)^2$

$81-18x+x^2 = (9-5x)(3-x)$

$81-18x+x^2 = 27-9x-15x+5x^2$

$5x^2-9x-15x+27-81+18x-x^2=0$

$4x^2-6x-54=0 \quad |:2$

$2x^2-3x-27=0$

$D = 9-4\cdot2\cdot(-27) = 225; \ \sqrt{D}=15$

$x_1 = \frac{3+15}{4} = \frac{18}{4} = 4,5 \qquad x_2 = \frac{3-15}{4} = -\frac{12}{4} = -3.$

Выполним проверку:

а) $x=4,5$: $\sqrt{3-4,5} + \frac{6}{\sqrt{3-4,5}} = \sqrt{9-22,5}$ – нет смысла, т.к. выражения под знаками квадратных корней отрицательны.

б) $x=-3$: $\sqrt{3-(-3)} + \frac{6}{\sqrt{3-(-3)}} = \sqrt{9+15}$

$\sqrt{6} + \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{24}$

$\sqrt{6} + \frac{6\sqrt{6}}{6} = \sqrt{6\cdot4}$

$2\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$ – верно.

Произведение корней равно -3 (т.к. корень – единственный)

г) Уединим один из корней в левой части, после чего возведем обе части уравнения в квадрат.

$\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+1} = 2$

$\sqrt{3x+1} = 2+\sqrt{x+1}$

$(\sqrt{3x+1})^2 = (2+\sqrt{x+1})^2$

$3x+1 = 4+4\sqrt{x+1}+x+1$; Снова уединим радикал в правой части, после чего опять возведем в квадрат обе части.

$3x+1-4-x-1 = 4\sqrt{x+1}$

$2x-4 = 4\sqrt{x+1} \quad |:2$

$x-2 = 2\sqrt{x+1}$

$(x-2)^2 = (2\sqrt{x+1})^2$

$x^2-4x+4=4(x+1)$

$x^2-4x+4=4x+4$

$x^2-4x+4-4x+4=0$

$x^2-8x=0$

$x(x-8)=0$

$x_1=0 \quad x_2=8.$

Выполним проверку:

а) $x=0$: $\sqrt{3\cdot 0+1}-\sqrt{0+1}=2$

$1-1\neq 2$ – неверно

б) $x=8$: $\sqrt{3\cdot 8+1}-\sqrt{8+1}=2$

$\sqrt{25}-\sqrt{9}=2$

$5-3=2$

$2=2$ – верно.

Произведение корней равно 8 (т.к. корень – единственный)

д) Уединить радикалы не представляется возможным, поэтому сразу возведем обе части в квадрат.

$\sqrt{4x+9}-\sqrt{x}=\sqrt{x+5}$

$(\sqrt{4x+9}-\sqrt{x})^2=(\sqrt{x+5})^2$

$4x+9-2\sqrt{x(4x+9)}+x=x+5$

Уединим радикал в левой части, после чего снова обе части возведем в квадрат.

$-2\sqrt{x(4x+9)}=x+5-x-4x-9$

$-2\sqrt{x(4x+9)}=-4x-4 \quad |:(-2)$

$\sqrt{x(4x+9)}=2x+2$

$(\sqrt{x(4x+9)})^2=(2x+2)^2$

$x(4x+9)=4x^2+8x+4$

$4x^2+9x-4x^2-8x-4=0$

$x-4=0$

$x=4.$

Выполним проверку:

$x=4$: $\sqrt{4\cdot 4+9}-\sqrt{4}=\sqrt{4+5}$

$\sqrt{25}-\sqrt{4}=\sqrt{9}$

$5-2=3$

$3=3$ – верно

Произведение корней равно 4 (т.к. корень – единственный) е) $x^2+3x+\sqrt{x^2+3x}=6$

Введем новую неизвестную $y=\sqrt{x^2+3x}$, тогда $x^2+3x=\sqrt{(x^2+3x)^2}=y^2$

Получим:

$y^2+y=6$

$y^2+y-6=0$

$y_1=-3 \quad y_2=2$

Вернемся к старой неизвестной:

1) $\sqrt{x^2+3x}=-3$ – нет смысла, т.к. корни мы считаем арифметическими.

2) $\sqrt{x^2+3x}=2$; Возведем обе части в квадрат.

$x^2+3x=4$

$x^2+3x-4=0$

$x_1=-4 \quad x_2=1.$

Выполним проверку:

а) $x=-4$: $(-4)^2+3\cdot(-4)+\sqrt{(-4)^2+3\cdot(-4)}=6$

$16-12+\sqrt{16-12}=6$

$4+2=6$

$6=6$ – верно.

б) $x=1$: $1+3\cdot1+\sqrt{1+3\cdot1}=6$

$4+\sqrt{4}=6$

$4+2=6$

$6=6$ – верно.

Произведение корней равно: $1\cdot(-4)=-4$.

ж) $\sqrt{\frac{2-x}{x+3}}+\sqrt{\frac{x+3}{2-x}}=3\frac{1}{3}$. ОДЗ: $x\neq-3$; $x\neq2$

Т.к. под знаками радикалов стоят обратные дроби, то введем новую неизвестную следующим образом:

$y=\sqrt{\frac{2-x}{x+3}}$; $\sqrt{\frac{x+3}{2-x}}=\frac{1}{y}$; Получим:

$y+\frac{1}{y}=3\frac{1}{3}$

$y+\frac{1}{y}=\frac{10}{3} \quad |\cdot 3y$

$3y^2+3=10y$

$3y^2-10y+3=0$

$D=100-4\cdot3\cdot3=64$; $\sqrt{D}=8$

$y_1=\frac{10+8}{6}=3 \quad y_2=\frac{10-8}{6}=\frac{1}{3}$

Вернемся к старой неизвестной

1) $\sqrt{\frac{2-x}{x+3}}=3$; Возведем в квадрат обе части:

$\frac{2-x}{x+3}=9 \mid \cdot x+3$

$2-x=9x+27$

$10x=-25$

$x=-2,5$

2) $\sqrt{\frac{2-x}{x+3}}=\frac{1}{3}$; Возведем обе части в квадрат

$\frac{2-x}{x+3}=\frac{1}{9} \mid \cdot 9(x+3)$

$9(2-x)=x+3$

$18-9x=x+3$

$-10x=-15$

$x=1,5$.

Выполним проверку:

а) $x=-2,5$: $\sqrt{\frac{2+2,5}{-2,5+3}}+\sqrt{\frac{-2,5+3}{2+2,5}}=3\frac{1}{3}$

$\sqrt{\frac{4,5}{0,5}}+\sqrt{\frac{0,5}{4,5}}=3\frac{1}{3}$

$\sqrt{9}+\sqrt{\frac{1}{9}}=3\frac{1}{3}$

$3+\frac{1}{3}=3\frac{1}{3}$

$3\frac{1}{3}=3\frac{1}{3}$ – верно.

б) $x=1,5$: $\sqrt{\frac{2-1,5}{1,5+3}}+\sqrt{\frac{1,5+3}{2-1,5}}=3\frac{1}{3}$

$\sqrt{\frac{0,5}{4,5}}+\sqrt{\frac{4,5}{0,5}}=3\frac{1}{3}$

$3+\frac{1}{3}=3\frac{1}{3}$

$3\frac{1}{3}=3\frac{1}{3}$ – верно.

Произведение корней равно: $1,5\cdot(-2,5)=-3,75$

д) $\sqrt[3]{x+44}-\sqrt[3]{x-19}=3$

Введем две новых неизвестных: $a=\sqrt[3]{x+44}$; $b=\sqrt[3]{x-19}$

Получим уравнение: $a-b=3$.

Возведем выражения замены в куб. Получим:

$a^3 = x+44$

$b^3 = x-19$

Вычтем полученные равенства; получим

$a^3 - b^3 = 63$; $(a-b)(a^2+ab+b^2)=63$; т.к. $a-b=3$, то:

$3\cdot(a^2+ab+b^2)=63$

$a^2+ab+b^2=21$

Мы пришли к системе уравнений:

$\begin{cases} a-b=3 \\ a^2+ab+b^2=21 \end{cases}$ Из первого уравнения получим: $a=b+3$ Подставим во второе уравнение:

$(b+3)^2+b(b+3)+b^2=21$

$b^2+6b+9+b^2+3b+b^2=21$

$3b^2+9b-12=0 \mid :3$

$b^2+3b-4=0$

$b_1=-4 \quad b_2=1$

Неизвестную a вычислять не обязательно, т.к. для определения значения x достаточно и неизвестной b:

1) $x-19=(-4)^3$

$x-19=-64$

$x_1=-45$

2) $x-19=1^3$

$x-19=1$

$x_2=20.$

Выполним проверку:

а) $x=-45$: $\sqrt[3]{-45+44}-\sqrt[3]{-45-19}=3$

$\sqrt[3]{-1}-\sqrt[3]{-64}=3$

$-1+4=3$

$3=3$ - верно.

б) $x=20$: $\sqrt[3]{20+44}-\sqrt[3]{20-19}=3$

$\sqrt[3]{64}-\sqrt[3]{1}=3$

$4-1=3$

$3=3$ - верно.

⑤ Иррациональные неравенства. Указать наименьшее целое решение

а) $\sqrt{x-5} < 1$ б) $\sqrt{5-x} \geq \sqrt{x+1}$

в) $\sqrt{16-x} < x+4$ г) $\sqrt{5x-x^2} > x-2$

д) $\sqrt{x+1} \geq 8 - \sqrt{3x+1}$

Решение.

а) $\sqrt{x-5} < 1$ Возведем обе части неравенства в квадрат.

$(\sqrt{x-5})^2 < 1^2$

$x-5 < 1$

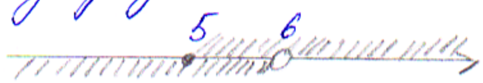
$x < 6$

Найдем область допустимых значений:

$\sqrt{\ }$ $x-5 \geq 0$

$x \geq 5$

Изобразим найденные промежутки на числовой оси:



$x \in [5;6)$

Наименьшим целым числом из этого промежутка является $x=5$.

б) $\sqrt{5-x} \geq \sqrt{x+1}$ Возведем обе части неравенства в квадрат

$(\sqrt{5-x})^2 \geq (\sqrt{x+1})^2$

$5-x \geq x+1$

$-x-x \geq 1-5$

$-2x \geq -4$

$x \leq -2$.

Найдем область допустимых значений:

$\begin{cases} 5-x \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -x \geq -5 \\ x \geq -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 5 \\ x \geq -1 \end{cases}$

Изобразим найденные промежутки на числовой оси:

$x \in [-1;5]$

Наименьшим целым числом из этого промежутка является $x=-1$.

в) $\sqrt{16-x} < x+4$

В условиях задачи правая часть отрицательной быть не может, т.к в этом случае мы получим заведомо ложное неравенство (отрицательное число больше неотрицательного)

Поэтому ОДЗ неравенства определяется системой неравенств:

$$\begin{cases}16-x\geq 0\\ x+4\geq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-x\geq -16\\ x\geq -4\end{cases} \quad \begin{cases}x\leq 16\\ x\geq -4\end{cases}$$

Возведем неравенство в квадрат. Получим:

$(\sqrt{16-x})^2<(x+4)^2$

$16-x<x^2+8x+16$

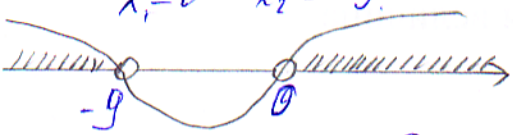
$\cancel{x}\ 16-x-x^2-8x-16<0$

$-x^2-\cancel{1}9x<0 \quad |\cdot(-1)$

$x^2+9x>0$

$x(x+9)>0.$

$x_1=0 \quad x_2=-9.$



С учетом ОДЗ получим:

$x\in[0;16]$

Наименьшее целое число из этого промежутка: $x=1$

2) $\sqrt{5x-x^2}>x-2.$

В условиях задачи правая часть может быть отрицательной, при этом неравенство останется верным. Возможны два случая:

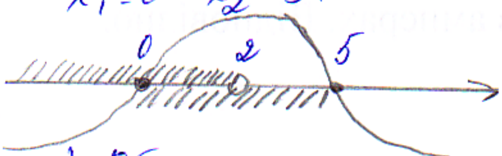
1) $\begin{cases}5x-x^2\geq 0\\ x-2<0\end{cases}$ (~~Правая~~ левая часть - неотрицательное число, а правая - отрицательное)

$x<2$

$5x-x^2\geq 0$

$x(5-x)\geq 0$

$x_1=0 \quad x_2=5.$



$x\in[0;2)$

2) Обе части - положительные числа ($x\geq 2$). Возведем обе части в квадрат:

$(\sqrt{5x-x^2})^2 > (x-2)^2$

$5x - x^2 > x^2 - 4x + 4.$

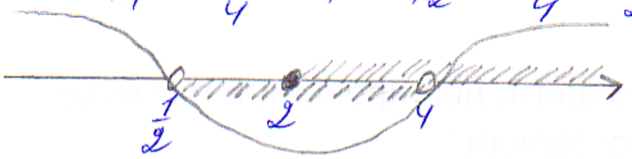
$5x - x^2 - x^2 + 4x - 4 > 0$

$-2x^2 + 9x - 4 > 0 \mid \cdot(-1)$

$2x^2 - 9x + 4 < 0.$

$D = 81 - 4\cdot 2\cdot(+4) = 81 - 32 = 49;\ \sqrt{D} = 7$

$x_1 = \frac{9+7}{4} = 4 \quad x_2 = \frac{9-7}{4} = \frac{1}{2}$



$x \in [2;4)$

Решением неравенства будет являться объединение результатов обоих случаев:

$x \in [0;4)$

Наименьшим целым числом из этого промежутка является: $x = 0$.

д) $\sqrt{x+1} \geq 8 - \sqrt{3x+1}$

Найдем область допустимых значений неравенства

$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 3x+1 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x \geq -\frac{1}{3}.$

Возведем обе части неравенства в квадрат:

$(\sqrt{x+1})^2 \geq (8 - \sqrt{3x+1})^2$

$x+1 \geq 64 - 16\sqrt{3x+1} + 3x + 1.$

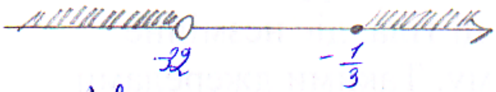
$16\sqrt{3x+1} \geq 64 + 3x + 1 - x - 1$

$16\sqrt{3x+1} \geq 64 + 2x \mid :2$

$8\sqrt{3x+1} \geq 32 + x$

Правая часть может быть отрицательной, при этом неравенство останется верным. Рассмотрим два случая:

1) $\begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ 32 + x < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x \geq -1 \\ x < -32 \end{cases} \quad \begin{matrix} x \geq -\frac{1}{3} \\ x < -32 \end{matrix}$



– нет решений.

2) $\begin{cases} x > -32 \\ (8\sqrt{3x+1})^2 \geq (32+x)^2 \end{cases}$

Решим второе неравенство системы отдельно:

$64(3x+1) \geq 1024+64x+x^2$

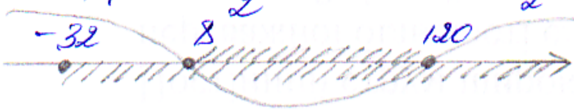
$192x+64 \geq 1024+64x+x^2$

$x^2+64x+1024-192x-64 \leq 0$

$x^2-128x+960 \leq 0$

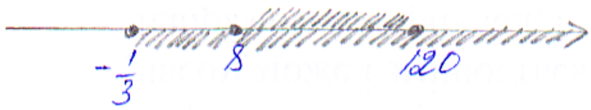
$D = 16384 - 4 \cdot 960 = 12544; \ \sqrt{D} = 112$

$x_1 = \dfrac{128-112}{2} = 8 \qquad x_2 = \dfrac{128+112}{2} = 120.$



$x \in [8; 120]$

Т.к. в первый случай решений не дал, то совместим результат второго случая с ОДЗ:



$x \in [8; 120]$

Наименьшим целым числом из этого промежутка является $x = 8$.

Задачи для самостоятельного решения:

① Корень n-ой степени и его свойства

а) $\sqrt[3]{11-\sqrt{57}}\cdot\sqrt[3]{11+\sqrt{57}}$ б) $\sqrt[4]{17-\sqrt{33}}\cdot\sqrt[4]{17+\sqrt{33}}$

в) $\dfrac{\sqrt[3]{49}\cdot\sqrt[3]{112}}{\sqrt[3]{250}}$ г) $\dfrac{\sqrt[4]{343}\cdot\sqrt[3]{7}}{\sqrt[12]{7}}$

д) $(\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})$

е) $\sqrt{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}}$

ж) $\sqrt[3]{\sqrt{15}-4}\cdot\sqrt[6]{31+8\sqrt{15}}$

з) $(15\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{125}-2\sqrt{7}\sqrt[4]{49})(\sqrt{45}+3)-183\sqrt{5}$

и) $\left(\dfrac{\sqrt[3]{9\sqrt{3}}}{\sqrt{3\sqrt[3]{3}}}\right)^{3}$

к) $\dfrac{7-4\sqrt{3}}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}}$

л) Найти значение выражения $a=x^3+3x$, если $x=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$

м) Найти значение выражения $a=x^3+3x-14$, если $x=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt{7-5\sqrt{2}}$

② Степень с дробным показателем, ее свойства

а) $81^{-1,25}\cdot 9^{1,5}\cdot 27^{\frac{2}{3}}$ б) $125^{\frac{25}{9}}\cdot 25^{-\frac{2}{3}}\cdot 625^{-2,25}$

в) $\left(\dfrac{5^{-\frac{5}{7}}\cdot 3^{-\frac{5}{7}}}{15^{-1}\cdot 2^{\frac{2}{7}}}\right)^{-7}$ г) $\left(\dfrac{14^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{-\frac{4}{3}}}{2^{-\frac{2}{3}}\cdot 7^{-\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}$

д) $\left(\dfrac{5^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{3}{4}}}-\dfrac{2^{\frac{1}{4}}}{5^{\frac{3}{4}}}\right)\cdot 1000^{\frac{1}{4}}$ е) $\left(\dfrac{16^{\frac{2}{3}}\cdot 25^{\frac{2}{3}}}{125^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{-\frac{2}{3}}}\right)^{-1}$

ж) $\left(\dfrac{128^{\frac{3}{14}}\cdot 9^{-\frac{2}{9}}}{3^{-\frac{1}{6}}\cdot 8^{\frac{1}{4}}}\right)^{-1} : \left(\dfrac{64^{\frac{1}{4}}\cdot 81^{\frac{9}{8}}}{27^{2}\cdot 2^{-\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{1}{3}}$

з) $(8+2\sqrt{15})(10^{\frac{1}{2}}-6^{\frac{1}{2}})(4-15^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$

и) $\dfrac{5^{2}\cdot 2^{\frac{1}{4}}+2\cdot 5^{\frac{1}{2}}}{5\cdot 10^{\frac{1}{2}}+5\cdot 8^{\frac{1}{4}}}-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{5}+\dfrac{5}{\sqrt{2}}+2\right)^{\frac{1}{2}}$

③ Упрощение выражений, содержащих корни и степени:

а) $\frac{a+7a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+7} - \frac{a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{8}}-b^{\frac{1}{8}}}$; вычислить при $a=27$, $b=256$.

б) $\frac{x^{\frac{1}{3}}+18}{x^{\frac{1}{4}}+4x^{\frac{1}{3}}} - \frac{x^{\frac{1}{3}}+1}{3x^{\frac{1}{3}}+12} - \frac{6-x^{\frac{1}{3}}}{3x^{\frac{1}{3}}}$; вычислить при $x=+125$

в) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y}}+\sqrt[3]{y}$, вычислить при $x=81$; $y=16$.

г) $\frac{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}y}-1$; вычислить при $x=16$, $y=25$

д) $\left(\frac{1+b^{\frac{3}{2}}}{1+b^{\frac{1}{2}}}-\sqrt{b}\right)\cdot\frac{\sqrt{b}+1}{1-b}$, вычислить при $b=144$

е) $\left(\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\frac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a-b}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{ab}}$, вычислить при $a=4$, $b=9$.

ж) $\left(\frac{m-m}{m^{\frac{3}{4}}+m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{4}}}-\frac{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{4}}+n^{\frac{1}{4}}}\right)\cdot\sqrt{\frac{m}{n}}$; вычислить при $m=16$, $n=625$

з) $\frac{a+\sqrt{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}}$; вычислить при $a=-216$

④ Иррациональные уравнения.

Решить уравнения. Если уравнение имеет несколько корней, в ответе указать их сумму:

а) $\sqrt{x+78}=x+6$

б) $\sqrt{x^2+5x-24}=4-x$

в) $\sqrt{x+7+\sqrt{x+10}}=3$

г) $\sqrt{2x-1+\sqrt{x+2}}=4$

д) $\sqrt{x-9}+\sqrt{x}=\frac{36}{\sqrt{x-9}}$

е) $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}=2$

ж) $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7$

з) $x^2+11+\sqrt{x^2+11}=42$

и) $\sqrt{x^2+x+5}+x^2+x+5=30$

к) $\sqrt{\frac{3-x}{x+1}}+\sqrt{\frac{x+1}{3-x}}=4{,}25$

л) $\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1$

м) $\sqrt[3]{12-x}+\sqrt[3]{x+14}=2$.

5. Иррациональные неравенства.

Решить неравенства. В ответе указать наименьшее целое решение.

а) $\sqrt{x-1} < 2$ б) $\sqrt{x+3} \geq 2$

в) $\sqrt{x^2+x-2} < 2$ г) $\sqrt{\dfrac{3x-1}{2-x}} > 1$

д) $\sqrt{3x-10} > \sqrt{6-x}$ е) $\sqrt{6-x^2} > \sqrt{-x}$

ж) $\sqrt{x-3} < x-2$ з) $\sqrt{-x^2-3x} < x+7$

и) $\sqrt{16-x} < x+4$ к) $\sqrt{9-x^2} > 3x$

л) $\sqrt{x^2+4x-5} > x-3$ (указать наименьшее натуральное решение)