Преобразование алгебраических выражений.

Примеры решения задач.

① Выполнить указанные действия над алгебраическими дробями:

а) сложение $\frac{5a+3}{2a^2+6a} + \frac{6-3a}{a^2-9}$

б) вычитание $\frac{x}{x^2-4x+4} - \frac{x+4}{x^2-4}$

в) умножение: $\frac{4c-d}{c^2+cd} \cdot \frac{2c^2-2d^2}{4c^2-cd}$

г) деление: $\frac{a^4-1}{a^2-a+1} : \frac{a-1}{a^3+1}$

Решение

а) Разложим знаменатели дробей на множители и приведем дроби к общему знаменателю

$$\frac{5a+3}{2a^2+6a} + \frac{6-3a}{a^2-9} = \frac{\overset{a-3}{5a+3}}{2a(a+3)} + \frac{\overset{2a}{6-3a}}{(a-3)(a+3)} = \frac{(5a+3)(a-3)+2a(6-3a)}{(a-3)(a+3)\cdot 2a} =$$

$$= \frac{5a^2-15a+3a-9+12a-6a^2}{2a(a-3)(a+3)} = \frac{-a^2-9}{2a(a-3)(a+3)} = -\frac{a^2+9}{2a(a-3)(a+3)}$$

б) Разложим знаменатели дробей на множители и приведем дроби к общему знаменателю ~~сократив перед этим вторую дробь.~~

$$\frac{x}{x^2-4x+4} - \frac{x+4}{x^2-4} = \frac{\overset{x+2}{x}}{(x-2)^2} - \frac{\overset{x-2}{x+4}}{(x-2)(x+2)} = \frac{x(x+2)-(x+4)(x-2)}{(x-2)^2(x+2)} =$$

$$= \frac{x^2+2x-(x^2-2x+4x-8)}{(x-2)^2(x+2)} = \frac{x^2+2x-x^2+2x-4x+8}{(x-2)^2(x+2)} = \frac{8}{(x-2)^2(x+2)}$$

в) Разложим на множители числители и знаменатели дробей и выполним умножение, перед этим сократив дроби:

$$\frac{4c-d}{c^2+cd} \cdot \frac{2c^2-2d^2}{4c^2-cd} = \frac{4c-d}{c(c+d)} \cdot \frac{2(c^2-d^2)}{c(4c-d)} = \frac{1}{c(c+d)} \cdot \frac{2(c-d)(c+d)}{c} =$$

$$= \frac{1}{\cancel{a}\,c} \cdot \frac{2(c-d)}{c} = \frac{2(c-d)}{c^2}$$

г) Перейдем от деления дробей к умножению на дробь, обратную делимому:

$$\frac{a^4-1}{a^2-a+1} : \frac{a-1}{a^3+1} = \frac{a^4-1}{(a^2-a+1)} \cdot \frac{a^3+1}{a-1} = \frac{(a^2-1)(a^2+1)}{a^2-a+1} \cdot \frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a-1} =$$

$$= \frac{(a^2+1)(a-1)(a+1)}{1} \cdot \frac{a+1}{a-1} = (a^2+1)(a+1)^2$$

② Упростить выражения

а) $\left(m+1-\frac{1}{1-m}\right) : \left(m-\frac{m^2}{m-1}\right)$, результат вычислить при $m=2{,}5$.

б) $\left(\frac{ab}{a^2-b^2}+\frac{b}{2b-2a}\right) : \frac{2b}{a^2-b^2}$, результат вычислить при $a=32, b=20$

в) $(xy^{-2}+x^{-2}y) \cdot \left(\frac{x^2-xy+y^2}{x}\right)^{-1}$

Решение

а) Сначала выполним вычитание в обеих скобках, после деление

$A=\left(m+1-\frac{1}{1-m}\right) : \left(m-\frac{m^2}{m-1}\right) = -m$, при $m=2{,}5$, ~~получим~~ $A=-2{,}5$.

1) $\frac{m+1}{1}^{\,1-m} - \frac{1}{1-m} = \frac{(1+m)(1-m)-1}{1-m} = \frac{1-m^2-1}{1-m} = -\frac{m^2}{1-m}$

2) $\frac{m}{1}^{\,m-1} - \frac{m^2}{m-1} = \frac{m(m-1)-m^2}{m-1} = \frac{m^2-m-m^2}{m-1} = -\frac{m}{m-1}$

3) $-\frac{m^2}{1-m} : \left(-\frac{m}{m-1}\right) = \frac{m^2}{1-m} \cdot \frac{m-1}{m} = -\frac{m^2}{m-1} \cdot \frac{m-1}{m} = -m$

При $m=2{,}5$ значение выражения равно $-2{,}5$

б) Сначала выполним сложение дробей в скобках, а после деление

$A=\left(\frac{ab}{a^2-b^2}+\frac{b}{2b-2a}\right) : \frac{2b}{a^2-b^2} = \frac{a-b}{4}$, при $a=32, b=20$, $A=3$.

1) $\frac{ab}{a^2-b^2}+\frac{b}{2b-2a} = \frac{ab}{(a-b)(a+b)} + \frac{b}{2(b-a)} = \frac{^{2}ab}{(a-b)(a+b)} - \frac{^{a+b}b}{2(a-b)} =$

$= \frac{2ab-b(a+b)}{2(a-b)(a+b)} = \frac{2ab-ab-b^2}{2(a-b)(a+b)} = \frac{ab-b^2}{2(a-b)(a+b)} = \frac{b(a-b)}{2(a-b)(a+b)} =$

$= \frac{b}{2(a+b)}$

2) $\frac{b}{2(a+b)} : \frac{2b}{a^2-b^2} = \frac{b}{2(a+b)} \cdot \frac{(a-b)(a+b)}{2b} = \frac{a-b}{4}$

При $a=32$, $b=20$ получим $A=\frac{32-20}{4} = \frac{12}{4} = 3$

в) ~~Н~~ Перейдем к положительным показателям степеней, а после выполним действия

$$A=(xy^{-2}+x^{-2}y)\cdot\left(\frac{x^2-xy+y^2}{x}\right)^{-1}=\left(\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\right)\cdot\frac{x}{x^2-xy+y^2}=\frac{x+y}{xy^2}$$

1) $\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}=\frac{x^3+y^3}{x^2y^2}=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x^2y^2}$

2) $\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x^2y^2}\cdot\frac{x}{x^2-xy+y^2}=\frac{x+y}{xy^2}$

③ Найти значение числовых выражений:

а) $(\sqrt5+7\sqrt2)(7\sqrt2-\sqrt5)-(\sqrt{10}-2\sqrt5)^2$

б) $\left(\sqrt{7-4\sqrt3}+\sqrt{7+4\sqrt3}\right)^2$

в) $\frac{\sqrt5-\sqrt3}{\sqrt5+\sqrt3}+\frac{\sqrt5+\sqrt3}{\sqrt5-\sqrt3}$

Решение:

а) Использовав формулы разности квадратов и квадрата разности, получим:

$(\sqrt5+7\sqrt2)(7\sqrt2-\sqrt5)-(\sqrt{10}-2\sqrt5)^2=(7\sqrt2+\sqrt5)(7\sqrt2-\sqrt5)-((\sqrt{10})^2-4\sqrt5\sqrt{10}+$
$+(2\sqrt5)^2)=(7\sqrt2)^2-(\sqrt5)^2-(10-4\sqrt{50}+20)=98-5-10+4\sqrt{50}-20=$
$=63-4\sqrt{50}=63-4\sqrt{25\cdot2}=63-20\sqrt2$

б) Возведем в квадрат согласно формулы квадрата суммы

$\left(\sqrt{7-4\sqrt3}+\sqrt{7+4\sqrt3}\right)^2=\left(\sqrt{7-4\sqrt3}\right)^2+2\sqrt{7-4\sqrt3}\cdot\sqrt{7+4\sqrt3}+\left(\sqrt{7+4\sqrt3}\right)^2=$
$=7-4\sqrt3+2\sqrt{(7-4\sqrt3)(7+4\sqrt3)}+7+4\sqrt3=14+2\sqrt{7^2-(4\sqrt3)^2}=$
$=14+2\sqrt{49-48}=16.$

в) $\frac{\sqrt5-\sqrt3}{\sqrt5+\sqrt3}+\frac{\sqrt5+\sqrt3}{\sqrt5-\sqrt3}$; Приведем данные дроби к общему знаменателю

$\frac{\sqrt5-\sqrt3}{\sqrt5+\sqrt3}+\frac{\sqrt5+\sqrt3}{\sqrt5-\sqrt3}=\frac{(\sqrt5-\sqrt3)^2+(\sqrt5+\sqrt3)^2}{(\sqrt5-\sqrt3)(\sqrt5+\sqrt3)}=\frac{(\sqrt5)^2-2\sqrt5\cdot\sqrt3+(\sqrt3)^2+(\sqrt5)^2+2\sqrt5\cdot\sqrt3+(\sqrt3)^2}{(\sqrt5)^2-(\sqrt3)^2}=$
$=\frac{5-2\sqrt{15}+3+5+2\sqrt{15}+3}{5-3}=\frac{16}{2}=8.$

④ Упростить выражения:

а) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b}$, результат вычислить при $a=36$, $b=4$

б) $\left(\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-3\sqrt{x}+9}-\dfrac{\sqrt{xy}-9}{x\sqrt{x}+27}\right)\cdot\dfrac{x\sqrt{x}+27}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$, результат вычислить при $x=121$, $y=81$.

в) $\sqrt{\dfrac{x}{x-a^2}}:\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}-\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}\right)$

Решение

а) Перед приведением дробей к общему знаменателю сократим их, учитывая, что $a=(\sqrt{a})^2$, $b=(\sqrt{b})^2$, $a\sqrt{a}=(\sqrt{a})^3$, $b\sqrt{b}=(\sqrt{b})^3$. Получим:

$$A=\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b}=\frac{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{(\sqrt{a})^3-(\sqrt{b})^3}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-$$

$$-\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{\overset{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}}{1}-\frac{a+\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(a+\sqrt{ab}+b)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a+2\sqrt{ab}+b-a-\sqrt{ab}-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

При $a=36$ и $b=4$ получим $A=\dfrac{\sqrt{4\cdot 36}}{\sqrt{36}+\sqrt{4}}=\dfrac{2\cdot 6}{6+2}=\dfrac{12}{8}=\dfrac{3}{2}=1{,}5$

б) Сначала выполним вычитание в скобках, а после - умножение. Учтем, что $x=(\sqrt{x})^2$ и $x\sqrt{x}=(\sqrt{x})^3$

$$A=\left(\frac{\sqrt{x}-3}{x-3\sqrt{x}+9}-\frac{\sqrt{xy}-9}{x\sqrt{x}+27}\right)\cdot\frac{x\sqrt{x}+27}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\sqrt{x};$$ при $x=121$, $y=81$: $A=11$.

1) $$\frac{\sqrt{x}-3}{x-3\sqrt{x}+9}-\frac{\sqrt{xy}-9}{x\sqrt{x}+27}=\frac{\overset{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}}{(\sqrt{x})^2-3\sqrt{x}+9}-\frac{\sqrt{xy}-9}{(\sqrt{x}+3)((\sqrt{x})^2-3\sqrt{x}+9)}=$$

$$=\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)-(\sqrt{xy}-9)}{(\sqrt{x}+3)(x-3\sqrt{x}+9)}=\frac{x-9-\sqrt{xy}+9}{(\sqrt{x}+3)(x-3\sqrt{x}+9)}=\frac{x-\sqrt{xy}}{(\sqrt{x}+3)(x-3\sqrt{x}+9)}$$

2) $$\frac{x-\sqrt{xy}}{(\sqrt{x}+3)(x-3\sqrt{x}+9)}\cdot\frac{x\sqrt{x}+27}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+3)(x-3\sqrt{x}+9)}\cdot\frac{(\sqrt{x}+3)(x-3\sqrt{x}+9)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=$$

$$=\sqrt{x}$$

При $x=121$, $y=81$ получим $A=\sqrt{121}=11$

в) Выполним сначала вычитание в скобках, а потом - деление

$$A = \sqrt{\frac{x}{x-a^2}} : \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}} - \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}\right) = -\frac{4a^2}{x-a^2}$$

1) $$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}} - \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2})^2-(\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2})(\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2})} =$$

$$= \frac{x-2\sqrt{x(x-a^2)}+x-a^2-(x+2\sqrt{x(x-a^2)}+x-a^2)}{x-(x-a^2)} = \frac{x-2\sqrt{x(x-a^2)}+x-a^2-x-2\sqrt{x(x-a^2)}-x+a^2}{x-x+a^2} =$$

$$= \frac{-4\sqrt{x(x-a^2)}}{a^2} = -4\sqrt{\frac{x(x-a^2)}{a^4}}$$

2) $$\sqrt{\frac{x}{x-a^2}} : \left(-4\sqrt{\frac{x(x-a^2)}{a^4}}\right) = -4\sqrt{\frac{x}{x-a^2}} \cdot \sqrt{\frac{a^4}{x(x-a^2)}} = -4\sqrt{\frac{a^4}{(x-a^2)^2}} = -\frac{4a^2}{x-a^2}$$

5) Вычислить

а) $\sqrt{27+10\sqrt{2}} + \sqrt{27-10\sqrt{2}}$

б) $\sqrt{29-12\sqrt{5}} - \sqrt{29+12\sqrt{5}}$

Решение.

а) I способ. Представим подкоренные выражения в виде точных квадратов

$$A = \sqrt{27+10\sqrt{2}} + \sqrt{27-10\sqrt{2}} = \sqrt{27+2\cdot5\cdot\sqrt{2}} + \sqrt{27-2\cdot5\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{5^2-2\cdot5\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2} +$$
$$+ \sqrt{5^2+2\cdot5\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2} = \sqrt{(5-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(5+\sqrt{2})^2} = |5-\sqrt{2}| + |5+\sqrt{2}| = 5-\sqrt{2}+5+\sqrt{2} = 10$$

При раскрытии знака модуля мы учли, что оба подмодульных выражения положительны.

II способ: Обозначим данное выражение как $A = \sqrt{27+10\sqrt{2}} + \sqrt{27-10\sqrt{2}}$ и возведем его в квадрат

$$A^2 = \left(\sqrt{27+10\sqrt{2}} + \sqrt{27-10\sqrt{2}}\right)^2 = 27+10\sqrt{2} + 2\sqrt{(27+10\sqrt{2})(27-10\sqrt{2})} + 27 - 10\sqrt{2} =$$
$$= 54 + 2\sqrt{27^2-(10\sqrt{2})^2} = 54+2\sqrt{729-200} = 54+2\cdot23 = 100$$

Значит $A=10$ или $A=-10$. Т.к. данное выражение положительно, то $A=10$.

б) Подкоренные выражения точными квадратами не являются, поэтому воспользуемся II способом:

$$A^2 = \left(\sqrt{29-12\sqrt{5}} - \sqrt{29+12\sqrt{5}}\right)^2 = 29-12\sqrt{5} - 2\sqrt{(29-12\sqrt{5})(29+12\sqrt{5})} + 29 + 12\sqrt{5} =$$
$$= 58 - 2\sqrt{29^2-(12\sqrt{5})^2} = 58 - 2\sqrt{841-5\cdot144} = 58-2\cdot11 = 36$$

Значит $A=6$ или $A=-6$. Но данное выражение отрицательно, т.к. $\sqrt{29-12\sqrt{5}} < \sqrt{29+12\sqrt{5}}$. Получим: $A=-6$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Выполнить действия:

а) $\dfrac{x^2+1}{x^2-2x+1}+\dfrac{x+1}{x-1}$ б) $\dfrac{b-2}{b^2+6b+9}-\dfrac{b}{b^2-9}$ в) $\dfrac{a^4-1}{a^3-a}\cdot\dfrac{4a^2}{a^2+1}$

г) $\dfrac{3x+15y}{x^2-81y^2}:\dfrac{4x+20y}{x^2-18xy+81y^2}$

2. Упростить выражения:

а) $\dfrac{x-2}{x+2}\cdot\left(x-\dfrac{x^2}{x-2}\right)$; вычислить результат при $x=2$

б) $\left(\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{x-y}\right):\dfrac{x^2+y^2}{x^2+xy}$; вычислить результат при $x=3, y=2$.

в) $\dfrac{3a-1}{a^2-7a}\cdot\left(\dfrac{a-7}{3a-1}+\dfrac{a-7}{a+1}\right)$; вычислить результат при $a=-5$

г) $\left(\dfrac{15}{y-7}-y-7\right)\cdot\dfrac{7-y}{y^2-16y+64}$; вычислить результат при $y=12$.

д) $\left(\dfrac{ax-b}{a+b}+\dfrac{bx+a}{a-b}\right)\cdot\left(\dfrac{a^2-b^2}{x^2-1}:\dfrac{a^2+b^2}{x-1}\right)$, вычислить результат при $a=2,5;\ b=1,5,\ x=2$

е) $\dfrac{b^{-2}+b^{-1}+1}{1-b+b^2}$

ж) $(x^2-xa^{-1}+a^{-2})\cdot(a+x^{-1})-x\cdot(ax)^{-2}$

3. Найти значение числового выражения:

а) $(10-4\sqrt{6})(\sqrt{6}+2)^2$ в) $(\sqrt{7}-2\sqrt{3})(2\sqrt{3}+\sqrt{7})-(3\sqrt{2}-\sqrt{6})^2$

б) $(5-\sqrt{2})^2-(3+\sqrt{2})^2$ г) $(3\sqrt{5}-1)^2-(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{6})$

д) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ е) $\dfrac{\sqrt{13}+\sqrt{17}}{\sqrt{13}-\sqrt{17}}+\dfrac{\sqrt{13}-\sqrt{17}}{\sqrt{13}+\sqrt{17}}$

4. Упростить выражения.

а) $\dfrac{a+b}{\sqrt{ab}-b}-\dfrac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ б) $\left(\dfrac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-7}-\dfrac{28\sqrt{x}}{x-49}\right):\dfrac{\sqrt{x}-7}{x+7\sqrt{x}}$

в) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\dfrac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$, вычислить результат при $a=144;\ b=64$

г) $\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}-\dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}-(1-x)}$, вычислить результат при $x=0,25$.

д) $\left(\dfrac{3}{\sqrt{1+a}}+\sqrt{1-a}\right):\left(\dfrac{3}{\sqrt{1-a^2}}+1\right)$, вычислить результат при $a=-0,69$

5) Вычислить

а) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ б) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{9+4\sqrt{5}}$

в) $\sqrt{57+40\sqrt{2}}-\sqrt{57-40\sqrt{2}}$