Кратко записать конспект. Письменно ответить на вопросы

ВЫПОЛНЕННОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

отсылать на почту колледжа, указать предмет, ФИО преподавателя

в виде фотографии:

distance\_akite@list.ru

**СРОКИ ВЫПОЛНЕНИЕ ЗАДАНИЕ 28.10.2020 ДО 10:00**

**Практическое занятие**

**Тема:** «Распознавание графов на изоморфность, Эйлеровость и Гамильтоновость»

  Основы теории графов разработал Леонард Эйлер, решавший задачу о разработке замкнутого маршрута движения по мостам в г. Кенигсберге. При решении задачи он обозначил каждую часть суши точкой, а каждый мост – линией, их соединяющей. В результате был получен граф (рис. 1).



Эйлер доказал, что такая задача решения не имеет. Быстрое развитие теория графов получила с созданием электронно – вычислительной техники, которая позволяла решить многие задачи алгоритмизации.

Пусть на плоскости задано некоторое множество вершин *Х* и множество  соединяющих их дуг. Графом называется бинарное отношение множества *Х* и множества  :  , или, иначе  .

Граф называется *ориентированным*, если указано направление дуг и *неориентированным*, если такое направление не указано. Примером неориентированного графа является карта дорог.

*Петля* – это ребро, у которого начальная и конечная вершины совпадают. Две вершины называются *смежными*, если существует соединяющая их дуга. Ребро называется *инцидентным* вершине, если оно выходит или входит в вершину.

*Степенью (валентностью) вершины* называется число инцидентных ей ребер. *Кратностью пары вершин* называется число соединяющих их ребер или дуг.

В изображении графа имеется относительно большая свобода в размещении вершин и выборе формы соединяющей их ребер. Поэтому один и тот же граф может быть представлен (на плоскости) по-разному.

Графы называются *изоморфными*, если между множествами их вершин существует взаимно однозначное соответствие, такое, что вершины соединены ребрами в одном из графов в том и только том случае, когда соответствующие им вершины соединены в другом графе. Если ребра графа ориентированы, то их направление в изоморфных графах также должно соответствовать друг другу.

 В теории графов есть понятие *обход графа*. Это маршрут, содержащий все ребра или вершины графа и обладающий определенными свойствами. Наиболее известными обходами графа являются Эйлеровы и гамильтоновы цепи и циклы.

 **Маршруты, цепи и циклы.***Маршрут* (или *путь*) в графе – это чередующаяся последовательность вершин и ребер *u*1, *p*1, *u*2, *p*2, …, *un*,*pn*, *un*+1, начинающаяся и кончающаяся вершиной, и каждое ребро *pi*инцидентно вершинам *ui*и *ui*+1, где *i*=1,…,*n*.



Этот маршрут обычно обозначается по вершинам:*u*1*u*2…*unun*+1.



Маршрут называется *замкнутым*, если *un*+1=*u*1, и *открытым*, если*un*+1¹*u*1.

*Цепь* – это открытый маршрут, в котором все ребра различны.

*Простая цепь* – это маршрут, в котором все вершины различны.

Если в маршруте два ребра равны, то равны и вершины – их концы. Значит, если все вершины маршрута различны, то и все ребра различны, поэтому простая цепь является цепью.

**Пример 1**. Рассмотрим граф с вершинами 1, 2, 3, 4, 5 и 6 с ребрами {1,2}, {1,4}, {2,3}, {2,4}, {2,5}, {3,5}, {3,6} и {5,6}.



Приведем некоторые открытые маршруты в этом графе.

Маршрут 1253256 не является цепью.



Маршрут 1245236 является цепью, но не является простой цепью.



Маршрут 124536 является простой цепью.



*Цикл* – это замкнутая цепь. *Простой цикл* – это замкнутая простая цепь с числом вершин ³3.

Приведем некоторые замкнутые маршруты в графе примера 1.

Маршрут 12532541 не является циклом.



Маршрут 1235241 является циклом, но не является простым циклом.



Маршрут 1235241 является простым циклом.



 **Задача о кенигсбергских мостах. Эйлеровы графы.** В 1736г. Леонард Эйлер решил задачу о кёнигсбергских мостах.

Четыре части суши – два берега (точки *A* и *D*) и два острова (точки *B* и *C*) соединены семью мостами:

**

Надо прогуляться по замкнутому маршруту, так, чтобы пройти через каждый из мостов только один раз.

Решение задачи сводится к рассмотрению следующего мультиграфа и к поиску в нем замкнутого маршрута, проходящего через все ребра ровно по одному разу:



Эйлеров цикл в мультиграфе – это цикл, содержащий все ребра.

Граф называется *эйлеровым*, если содержит эйлеров цикл.

Пример эйлерова графа:



Граф называется *связным*, если любые его две вершины соединены некоторой цепью.

**Теорема 1**. Граф *G* эйлеров тогда и только тогда, когда граф *G* связный граф и степень каждой вершины графа *G* есть чётное число.

*Доказательство*. Если граф *G* эйлеров, т.е. содержит цикл, проходящий через все ребра графа *G*, то, значит, граф связный, а каждая вершина графа инцидентна четному числу ребер: вместе с каждым ребром – «входом» цикла в вершину должно быть ребро – «выход» цикла из вершины.

Обратно, индукцией по числу ребер доказываем, что если граф *G* связный, а каждая вершина графа инцидентна четному числу ребер, то в графе найдется подграф – эйлеров цикл. Поскольку граф связный и степени вершин – четные числа, то степень каждой вершины не меньше 2, значит, в графе *G* найдется хотя бы один цикл *H*. Разность *G*/*H* распадается на связные компоненты, содержащие тоже вершины с четными степенями, значит, по индуктивному предположению, содержащие эйлеровы циклы *F*1, …, *Fm*. Соединяя подходящим образом граф *H* с графами *F*1, …, *Fm*, получим эйлеров цикл в графе *G*.



**3. Задача о кругосветном путешествии. Гамильтоновы графы**. Задача Гамильтона: совершить кругосветное путешествие по ребрам додекаэдра, вершины которого символизировали крупные города Земли, при этом побывать в каждом городе ровно по одному разу.

На рисунке – развертка додекаэдра.

*Гамильтонов цикл* – это простой цикл, проходящий через все вершины графа.

*Гамильтонов граф* – это граф, в котором содержащий хотя бы один гамильтонов цикл.

Полные графы – гамильтоновы.

Некоторые достаточные условия гамильтонова графа:

1) если степень каждой вершины -графа не меньше , то граф является гамильтоновым (*условие Дирака*);

2) если сумма степеней любой пары несмежных вершин -графа не меньше , то граф является гамильтоновым (*условие Оре*);

3) если для любого числа число вершин -графа , , со степенями не больших , меньше чем , и для нечетного число вершин степени не больше , то то граф является гамильтоновым (*условие Поша*).

Условие Поша обобщает условия Дирака и Оре.

Связный граф называется -*связным*, если для превращения его в несвязного графа нужно удалить не менее вершин.

Пример трехсвязного графа – *колесо* :



*Связностью* графа называется наименьшее число его вершин, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу.

Легко видеть, что односвязные графы негамильтоновы.

Значит, гамильтоновы графы двусвязные, т.е. они связности 2 и более.

*Тэта-графом* называют граф, содержащий две вершины степени 3, соединенные тремя простыми попарно непересекающимися цепями длины не менее двух:



Если двусвязный граф содержит тета-граф, то он негамильтонов граф.

**4. Примеры (не)эйлеровых и (не)гамильтоновых графов.**

Приведем примеры графов, обладающих или не обладающих свойствами эйлеровости и гамильтоновости.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| граф | гамильтонов | Не гамильтонов |
| эйлеров |  |  |
| не эйлеров |  |  |

**Для построения эйлерова цикла в связном графе со всеми вершинами четной степени** применяется следующий **алгоритм**:

1. Выйти из произвольной вершины

*vi* . Каждое пройденное ребро зачеркнуть.

Если путь

*l*1 замыкается в *vi*

и проходит через все ребра графа, то

получим искомый эйлеров цикл.

1. Если остались непройденные ребра, то должна существовать вершина

 принадлежащая *l*1 и ребру, не вошедшему в *l*1.

*v*2 ,

1. Так как

*v*2 четная, то число ребер, которым принадлежит

*v*2 и которые не

вошли в путь

*l*1,

тоже четно. Начем новый путь *l*2

из *v*2

и используем

только ребра, не принадлежащие *l*1 . Этот путь кончится в *v*2.

1. Объединим теперь оба цикла: из *vi*

пройдем по пути

*l*1 к

*v*2 ,

затем по *l*2 и,

вернувшись в *v*2 , пройдем по оставшейся части *l*1 обратно в *vi* .

1. Если снова найдутся ребра, которые не вошли в путь, то найдем новые циклы. Так как число ребер и вершин конечно, то процесс закончится.

Таким образом, замкнутую фигуру, в которой все вершины четные, можно начертить одним росчерком без повторений и начиная с любой точки.

На практике эйлеровым графом может быть план выставки; это позволяет расставить указатели маршрута, чтобы посетитель смог пройти по каждому залу в точности по одному разу.

**Для решения вопроса о существовании эйлерова цикла в графе достаточно выяснить, все ли его вершины четные.**

Критерий же существования гамильтонова цикла на произвольном графе еще не найден.

Однако есть несколько достаточных условий существования гамильтоновых циклов в графе:

1. Всякий полный граф является гамильтоновым, так как он содержит простой цикл, которому принадлежат все вершины данного графа.
2. Если граф, помимо простого цикла, проходящего через все его вершины, содержит и другие ребра, то он также является гамильтоновым.
3. Если граф имеет один гамильтонов цикл, то он может иметь и другие гамильтоновы циклы.

# Алгоритм проверки существования эйлерова пути

Представим динамику выполнения алгоритма проверки существования эйлерова пути (цикла) из вершины 0 для представленного на рисунке 1 графа.

Цикл существует.



*Рисунок 1*

Например, один из возможных путей прохождения всех ребер графа из вершины 0 может быть следующим:

0 – 1 – 2 – 0 – 6 – 4 – 2 – 3 – 4 – 5 – 0

В приведенном списке вершин, следующих за 0, каждая вершина является одновременно концом предыдущего ребра и началом следующего.

В соответствии с алгоритмом: 0 – степень 4;

1 – 2;

2 – 4;

3 – 2;

4 – 4;

5 – 2;

6 – 2;

Степени всех вершин четные, следовательно, эйлеров цикл в данном графе существует.

# Алгоритм поиска гамильтонова пути

Представим динамику выполнения рекурсивного алгоритма поиска гамильтонова пути (цикла) из вершины 0 для графа, представленного на рисунке 3.

*Рисунок 2*

Граф, изображенный на рисунке 2 отличается от рисунка 1 только добавлением ребра (3 – 5).

При этом степени вершин 3 и 5 стали нечетными.

Согласно алгоритму проверки существования эйлерова цикла, основывающемуся на проверке четности степени каждой вершины, в данном графе цикла быть не может.

Однако, если учесть следствие, по которому в точности две вершины имеют нечетную степень, то и в графе, изображенном на рисунке 1 должен существовать эйлеров путь.

Пример такого пути: 3 – 2 – 4- 3 – 5 – 4 – 6 – 0 – 2 – 1 – 0 – 5.

При этом две вершины, имеющие нечетную степень, находятся на концах такого

пути.

# Алгоритм поиска гамильтонова пути

Представим динамику выполнения рекурсивного алгоритма поиска гамильтонова пути (цикла) из вершины 0 для графа, представленного на рисунке 3.

*Рисунок 2*

Цикла не существует

0-1

1-2

2-3

3-4

4-5

4-6

2-4

4-3

4-5

4-6

0-2

2-1

2-3

3-4

4-5

4-6

2-4

4-3

4-5

4-6

0-5

5-4

4-2

2-1

2-3

4-3

3-2

2-1

4-6

0-6

6-4

4-2

2-1

4-3

3-2

2-1

4-5

Представим динамику выполнения рекурсивного алгоритма поиска гамильтонова

пути для представленного на рисунке 4 графа.

Цикл существует, например: 0 – 6 – 4 – 2 – 1 – 3 – 5 – 0.



*Рисунок 4*

Продемонстрируем поиск цикла от вершины 1.

#  1-0

0-5

5-3

3-2

2-4

4-6

3-4

4-2

4-6

5-4

4-2

2-3

4-6

#  0-6

**6-4**

4-2

2-3

3-5

4-3

3-2

3-5

#  4-5

**5-3**

**3-2**

**2-1**

Искомый путь 1 – 0 – 6 – 4 – 5- 3 – 2 – 1 .

# Вопросы:

1. Дайте определение эйлерова графа.
2. Сформулируйте алгоритм построения эйлерова цикла.
3. Какой граф называют гамильтоновым?
4. Существует ли эйлеров граф, обладающий висячей вершиной?
5. Чем отличается эйлеров путь от гамильтонова?