**ЛЕКЦИОННОЕ ЗАНЯТИЕ**

**Тема: «Основные законы распределения дискретных случайных величин»**

## **1. Биномиальный закон распределения (биномиальное распределение) дискретных случайных величин.**

Дискретная случайная величина *Х* распределена по*биномиальному закону*, если она принимает значения 0,1,2…,*m*…,*n*… с вероятностями, которые находятся по формуле Бернулли:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-EItG3i.png

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-RcsGID.png | 0 | 1 | … | *m* | … | *n* |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-aCf9QG.png | https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-UnxNDQ.png | https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-yQvzAh.png | … | https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-7N1O_j.png | … | https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-tKAUAk.png |

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-hTTRdD.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-Mes9ES.png

………………………………………………...

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-KyWRwk.png

**Теорема.** Математическое ожидание дискретной случайной величины, распределенной по биномиальному закону, равняется произведению числа всех испытаний на вероятность наступления события в отдельном испытании, то есть

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-e2sV9r.png**.**

Дисперсия равняется произведению числа всех испытаний на вероятность наступления и не наступления события в отдельном испытании, то есть

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-rqnkrS.png*.*

**Пример.**

По статистическим данным известно, что вероятность рождения мальчика составляет: *p* = 0,515.

Составить закон распределения числа мальчиков в семье с пятью детьми. Найти математическое ожиданиеhttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-FsX5fn.png, дисперсиюhttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-9GVMPh.png, среднее квадратическое отклонениеhttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-5ZUK3r.pngи модуhttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-1UiXlB.png.

**Решение:**

*X* ‒ случайная величина ‒ число мальчиков в семье с пятью детьми.

Составим закон распределения числа мальчиков в семье с пятью детьми:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-6AKSJH.png | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-MHl7JW.png | 0,026835 | 0,142475 | 0,302579 | 0,321296 | 0,170585 | 0,036227 |

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-ZNFoHj.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-zg3I9V.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-lBwmD0.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-IOXnLX.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-vkrVY5.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-OBj3uH.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-wBNavf.png

Проверка:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-H9nbgc.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-1tTG1w.png

1. Математическое ожидание:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-fnoYRN.png

2. Дисперсия:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-Dp2w0q.png

3. Среднее квадратическое отклонение:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-_Fj3aC.png

4. https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-Ee81l3.pngтак как при*m* = 3 вероятность максимальная. Она составляет: *p* = 0,321296.

## **2. Геометрический закон распределения (геометрическое распределение) дискретных случайных величин.**

Дискретная случайная величина распределена *геометрически*, если она принимает значения 1,2,…*m*…(бесконечное, но счетное количество раз) с вероятностями, находящимися по формуле общего члена геометрической прогрессии:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-zvlWa9.png

Случайная величина *X*= *m*, распределенная геометрически, представляет собой число испытаний (*m*) до первого положительного исхода.

Составим ряд распределения:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-xhjhdJ.png | 1 | 2 | … | *m* | … |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-QtRTPy.png | *p* | https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-ivLzgd.png | … | https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-warYq2.png | … |

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-51oknw.pngи т.д.

Теорема. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной геометрически, вычисляются по формулам:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-iBVnqF.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-SX03Fx.png

**Пример.**

Охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более 4‒х выстрелов.

Составить закон распределения числа выстрелов, если вероятность попадания при одном выстреле равна *p* = 0,7. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и моду числа выстрелов.

**Решение:**

По условию https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-cVDfBA.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-2rBMFo.pngчисло выстрелов

Составим закон распределения числа выстрелов:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-SHNrHy.png | 1 | 2 | 3 | 4 |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-Oe6Dad.png | 0,7 | 0,21 | 0,063 | 0,027 |

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-OhF0qh.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-uGOe7l.png

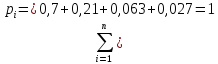
https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-kM87_2.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-SESOJx.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-76PDaD.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-Bd3SJA.png

**Проверка:**



1. Математическое ожидание:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-x24_1a.png

2. Дисперсия:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-SpcHK4.png

3. Среднее квадратическое отклонение:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-J8E5Hg.png

4. https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-vkIcDI.pngтак как при*m* = 1 вероятность максимальная, она составляет: *p* = 0,7.

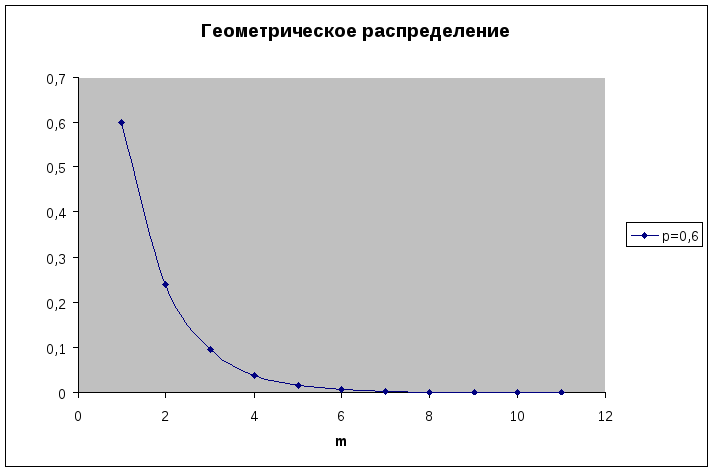
**Пример.**

Вероятность поражения цели равна 0,6. Производится стрельба по мишени до первого попадания (число патронов не ограничено). Требуется составить ряд распределения числа сделанных выстрелов, найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины. Определить вероятность того, что для поражения цели потребуется не более трёх патронов.

**Решение:**

Случайная величина *X* - число сделанных выстрелов - имеет геометрическое распределение с параметром *p*=0,6. Ряд распределения *X* имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-Ub5EzV.png | 1 | 2 | 3 | ... | *m* | ... |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-kHRCV5.png | 0,6 | 0,24 | 0,096 | ... | 0,6·0,4*m* | ... |



https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-aia6dh.png

Вероятность того, что для поражения цели потребуется не более трёх патронов:

*P*(*X*≤ 3) = *P*(*X*= 1) + *P*(*X*= 2) + *P*(*X*= 3) = 0,6+0,24+0,096 = 0,936.

# 3. Распределение Пуассона дискретных случайных величин.

Дискретная случайная величина распределена по закону Пуассона, если она принимает значения 0,1,2…*m*…*n*…, бесконечное, но счетное число раз, с вероятностями, определяемыми по формуле Пуассона:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-M5T3MT.png

гдеhttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-HwaZ97.png,*phttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-QExJh1.png*.

Закон распределения примет вид:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-XvXXh7.png | 0 | 1 | 2 | … | *m* | … |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-DwCE2T.png | https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-YpIcWp.png | https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-nHfgRk.png | https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-zl2PsQ.png | … | https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-lpAUwB.png | … |

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-UlqTa9.png,

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-VpSwKk.pngи т.д.

**Теорема.**Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, равны параметру Пуассона.

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-DZqF9m.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-SFVsF8.png

**Пример 1.**

Станок изготавливает за смену 100000 деталей. Вероятность изготовления бракованной детали *p* = 0,0001.

Найти вероятность того, что за смену будет изготовлено 5 бракованных деталей.

**Решение:**

Обозначим *n* = 100 000, *k* = 5, *p* = 0,0001. События, состоящие в том, что отдельная деталь бракована, независимы, число испытаний *n* велико, а вероятность *p* мала, поэтому воспользуемся распределением Пуассона:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-Ukp8Pv.png

гдеhttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-VY33jq.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-kHuN2d.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-IyxTzz.png

**Пример 2.**

Устройство состоит из 1000 элементов. Вероятность отказа любого элемента в течение времени *t* равна 0,002.

Найти математическое ожиданиеhttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-9TVdFs.png, дисперсиюhttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-cDUvGi.png, среднее квадратическое отклонениеhttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-l0nW81.pngи модуhttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-l64a06.png.

**Решение:**

*X* ‒ случайная величина ‒ число отказавших за время *t*элементов.

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-AOP7J2.png, https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-9x8bvU.png. Следовательно, случайная величина распределена по закону Пуассона.

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-rKSqIs.pngэлемента

Составим закон распределения Пуассона:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-d64VX8.png | 0 | 1 | 2 | 3 | … | *m* | … |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-wT6aWe.png | 0,135335 | 0,270671 | 0,270671 | 0,180447 | … | https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-68Hici.png | … |

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-II1Rfi.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-LaNVLi.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-ZAHj0p.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-YyzXzX.pngи т.д.

## **9. Непрерывная случайная величина. Функция распределения. Плотность вероятности. Вероятность попадания в заданный интервал.**

*Непрерывной случайной величиной* называют случайную величину, значения которой сплошь заполняют некоторый интервал.

Например, рост человека ‒ непрерывная случайная величина.

Функцией распределения случайной величины называют вероятность того, что случайная величина *Х* принимает значения, меньшие *х*.

***F*(*x*) = *P*( *X https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-KWFHbh.png***

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-J4bjjG.png

Геометрически, формула *F*(*x*) = *P*(*Xhttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-9rB2k_.png*означает, что все значения *Х* будут находиться, левее *х*. Функция *F*(*x*) называется интегральной функцией.

*Плотностью вероятности*непрерывной случайной величины *f*(*x*) называется производная от функции распределения этой случайной величины:

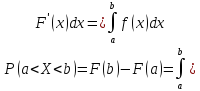
https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-GZR1Dq.png

Следовательно, *F*(*x*) первообразная для *f*(*x*).

**Теорема.** Вероятность попадания непрерывной случайной величины *X* в интервал от *a* до *b* находится по формуле:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-aGOdk3.png

**Доказательство.**



**Следствие.** Если все возможные значения случайной величины

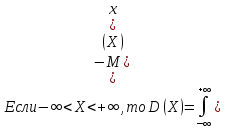
https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-K7Ig08.png

## **10. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины**

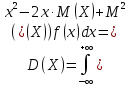
1. Математическое ожидание:

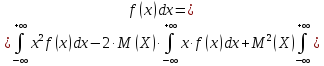
https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-Q_VCJh.png

2. Дисперсия:



Преобразуем эту формулу:





https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-yFdr9w.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-XgzK4X.png

‒ формула дисперсии для непрерывных случайных величин.

Тогда среднее квадратическое отклонение:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-h3e9c5.pnghttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-S1u2DZ.png

## **11. Основные законы распределения непрерывных случайных величин.**

## **1.Нормальный закон распределения.**

Из всех законов распределения для непрерывных случайных величин на практике чаще всего встречается *нормальный закон* распределения. Этот закон распределения является предельным, то есть все остальные распределения стремятся к нормальному.

**Теорема 1.**Непрерывная случайная величина распределена по *нормальному закону*с параметрами *а* и https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-nYcItj.png,если плотность вероятности имеет вид:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-JILYID.png

Математическое ожидание случайной величины, распределённой по нормальному закону распределения, равно *а*, то естьhttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-iZl0w2.pngдисперсияhttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-9xxv9K.pnghttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-Wl4Ivk.png.

**Теорема 2.**Вероятность попадания непрерывной случайной величины, распределенной по нормальному закону распределения в интервал от *α* до *β*, находится по формуле:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-6bNnRD.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-S7rhTK.png

**Пример.**

Полагая, что рост мужчин определенной возрастной группы есть нормально распределенная случайная величина  *X,* c параметрами *а* = 173 и https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-9TkEsR.png= 36.

**Найти:** а) выражение плотности вероятностей и функции распределения случайной величины *X*;

б) долю костюмов 4-го роста (176 – 182 см) в общем объеме производства.

**Решение:**

Плотность вероятности нормально распределенной случайной величины:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-Dh2t4P.png

Доля костюмов 4-го роста (176 – 182 см.) в общем объеме производства определяется по формуле как вероятность

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-zV7Qzg.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-2mWgIH.png

0,2417https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-RylT15.png100%https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-_KRH3q.png24,2% ‒ доля костюмов 4-го роста в общем объеме производства.

Итак, функция плотности вероятностей нормального закона распределения имеет вид:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-Nu1vMh.png

Тогда функция распределения:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-zdWJHH.png

|  |  |
| --- | --- |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-5VXNsb.png | https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-QsJE6A.png |

# 2.Показательный (экспоненциальный закон распределения).

Случайная величина *Х* распределена по *показательному закону* распределения с параметром *λ*, если её плотность вероятности имеет вид:

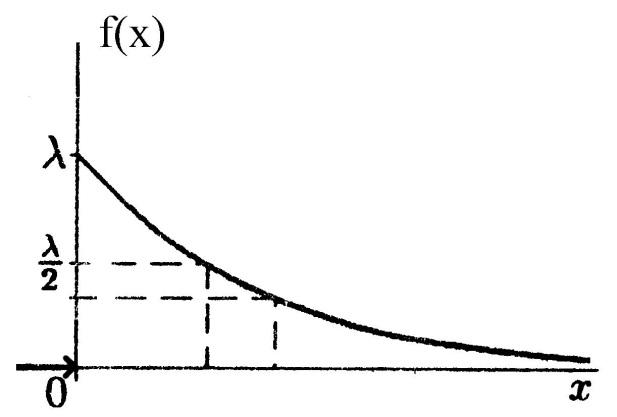
https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-Zq63mr.png

Функция распределения имеет вид:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-SWHKkX.png

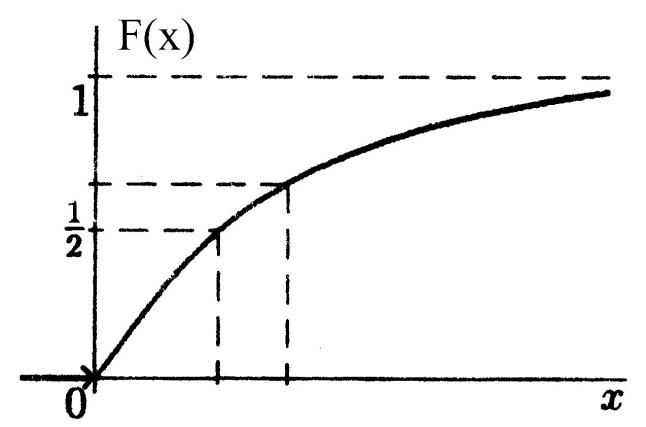
Математическое ожидание и дисперсия для случайной величины, распределенной по показательному закону, находятся по формулам:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-wv4S8q.png



https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-V5qYCP.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-IjMKa3.png



https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-vw5zJ3.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-aI4jd9.png

То есть при https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-tnnYT3.png

**Пример.**

Установлено, что время ремонта телевизоров есть случайная величина *X*, распределенная по показательному закону.

Определить вероятность того, что на ремонт телевизора потребуется не менее 20 дней, если среднее время ремонта телевизоров составляет 15 дней. Найти плотность вероятности, функцию распределения и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*.

**Решение:**

По условию математическое ожидание *M*(*х*)=1/λ = 15, откуда параметр *λ*= 1/15. Тогда плотность вероятности и функция распределения примут вид:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-G0OPCo.pnghttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-LVCbfC.png

(*х* ≥0)

Искомую вероятность *P*(*Х* ≥20) можно было найти по формуле, интегрируя плотность вероятности, то есть

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-ZKvQmb.pngно проще это сделать, используя функцию распределения:

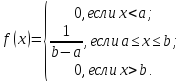
https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-ufgWww.png

Найдем среднее квадратическое отклонение: σ(*X*) = *М*(*Х*) = 15 дней.

## **3.Равномерный закон распределения.**

Непрерывная случайная величина *Х* имеет *равномерный закон* распределения (закон постоянной плотности) на отрезке [*a*; *b*], если на этом отрезке функция плотности вероятности случайной величины постоянна, то есть

*f*(*x*) имеет вид:



https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-UxcRjM.png

Следовательно, математическое ожидание случайной величины, равномерно распределенной на отрезке  (*a*, *b*), равняется середине этого отрезка.

         Дисперсия имеет вид:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-Iq1vKK.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-cVJZ43.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-_Ni6KC.png

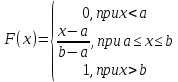
Найдем вероятность попадания значения случайной величины, имеющей равномерное распределение, на интервал https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-3YN1vn.png, принадлежащий целиком отрезку [*a*, *b*]:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-mghWQi.png

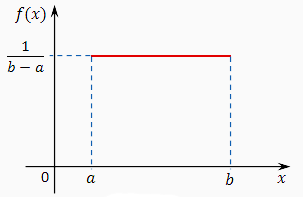
Следовательно,

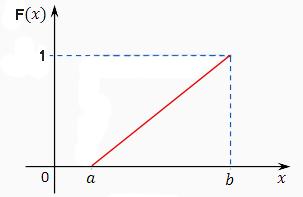
https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-SJm4w2.png

Функция распределения примет вид:



https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-Vstv6g.png





**Пример.**

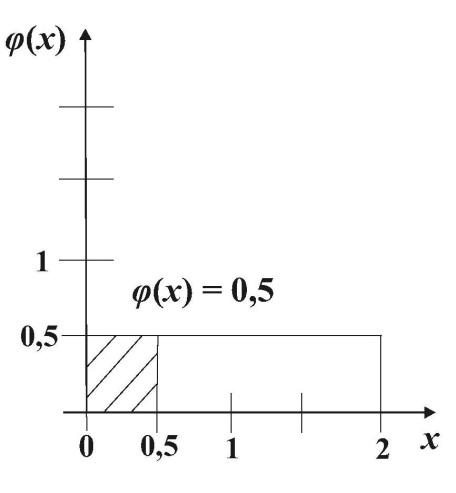
Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ждать пассажиру придется не больше полминуты.

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X* – времени ожидания поезда.

**Решение:**

Случайная величина *X* – время ожидания поезда на временном (в минутах) отрезке [0;2] имеет равномерный закон распределения  *f*(*x*)=1/2.

Поэтому вероятность того, что пассажиру придется ждать не более полминуты, равна 1/4 от равной единице площади прямоугольника, т.е.



https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-ZIv8qz.png

Найдем математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-OQ_8jz.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-aubrK1.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-vEpxP1.png

## **12. Вероятность заданного отклонения. Правило трех сигм.**

**Теорема.**Вероятность модуля отклонения непрерывной случайной величины X от её математического ожидания https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-cwE_fR.pngна величину сколь угодно малого числа ε>0 находится по формуле:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-eudLSc.png**(\*)**

Доказательство:

Так как

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-O095PL.png

то

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-MT9GXS.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-V8hsUB.png

Следовательно,

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-I4rjYL.png

**Правило трёх сигм.**

Пусть https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-DU2nf3.png.

Подставим значение ε в формулу (\*), получим:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-nPcvvB.png

Вывод:

Итак, с вероятностью сколь угодно близкой к единице можно утверждать, что модуль отклонения нормально распределенной случайной величины от её математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.

**Центральная предельная теорема.**

Центральная предельная теорема представляет собой группу теорем, посвященных установлению условий, при которых возникает нормальный закон распределения. Среди этих теорем важнейшее место принадлежит теореме Ляпунова.

**Теорема Ляпунова.**

Если случайная величина *Х* представляет собой сумму большого числа взаимно ‒ независимых случайных величин, то естьhttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-Xuc07u.png, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то случайная величина*Х* имеет распределение, неограниченно приближающееся к нормальному распределению.

**Начальные и центральные моменты непрерывной случайной величины, асимметрия и эксцесс. Мода и медиана.**

В прикладных задачах, например в математической ста­тистике, при теоретическом изучении эмпирических распре­делений, отличающихся от нормального распределения, воз­никает необходимость количественных оценок этих различий. Для этой цели введены специальные безразмерные характеристики.

**Определение.** *Мода непрерывной случайной величины ( Мо (X))*– это её наиболее вероятное значение, для которого вероятность p*i* или плотность вероятности f(x) достигает максимума.

**Определение.** *Медиана непрерывной случайной величины X (Me(X))* – это такое её значение, для которого выполняется равенство:

P (X < Me (X)) = P (X >Me (X)) = https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-xcboOo.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-oSDdXb.pnghttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-joxR_B.pnghttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-40R9xi.pnghttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-XQmXMU.pnghttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-LNEJAs.pnghttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-hvGI5W.pnghttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-nesDeo.pnghttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-QZsn2V.pnghttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-PwTGeO.pnghttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-xK7d7D.pnghttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-_FmH2B.pnghttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-dVrM1e.pnghttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-E1TUQ0.pnghttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-9zy0sm.pnghttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-0uvNxY.pnghttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-fxRulc.pnghttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-urwHb4.pnghttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-_CDMcN.pnghttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-tn4h9U.pnghttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-RVCTve.pnghttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-Sk1FKt.pngMe (X)

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-UX6d2H.pngx

f(x)

Геометрически вертикальная прямая x = Me (X) делит площадь фигуры под кривой на две равные части.

В точке X = Me (X), функция распределения F (Me (X)) = https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-uHWzMe.png

Пример:

Найти моду Mo, медиану Me и математическое ожидание M случайной величины X с плотностью вероятности f(x) = 3x2, при x Î [ 0; 1 ].

Решение:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-l0kMdM.pnghttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-sKXh7e.pnghttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-QxPyqX.pnghttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-97dx2N.png0

1

1. Плотность вероятности f (x) максимальна при x = 1, т.е. f (1) = 3, следовательно, Mo (X) = 1 на интервале [ 0; 1 ].
2. Для нахождения медианы обозначим Me (X) = b.

Так как Me (X) удовлетворяет условию P (X < Me (X)) = https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-gxjroK.png,

то P (-∞ < X < b) = https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-RwwHYQ.png = https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-GEw1Ty.png=

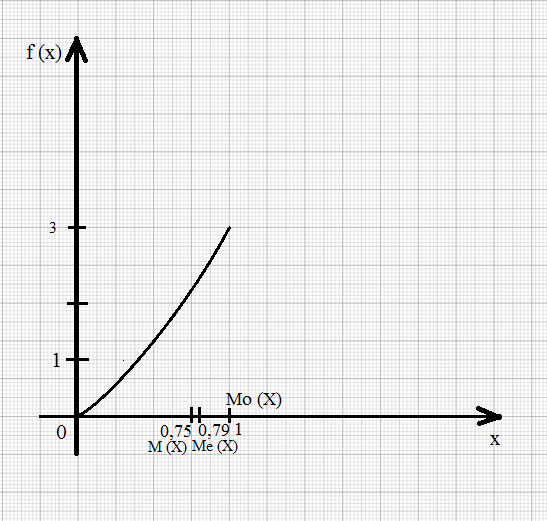
https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-ZRvALU.png=https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-hrK9iF.pnghttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-NzJzIY.png = b3 = https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-Icap6q.png.

b3 = https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-x3oaSf.png; b =https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-DEsYGa.png » 0,79

1. M (X) = https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-I4Pb45.png=https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-hPil5z.png+https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-wLYxI3.png=

=https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-Ml5JE6.png=https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-NibXZS.pnghttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-PyD5Ev.png = https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-ceS80K.png = 0,75

Отметим получившиеся 3 значения Mo (x), Me (X), M (X) на оси Ox:



**Определение.** *Асимметрией* теоретического распределения называется отношение центрального момента третьего поряд­ка к кубу среднего квадратического отклонения:

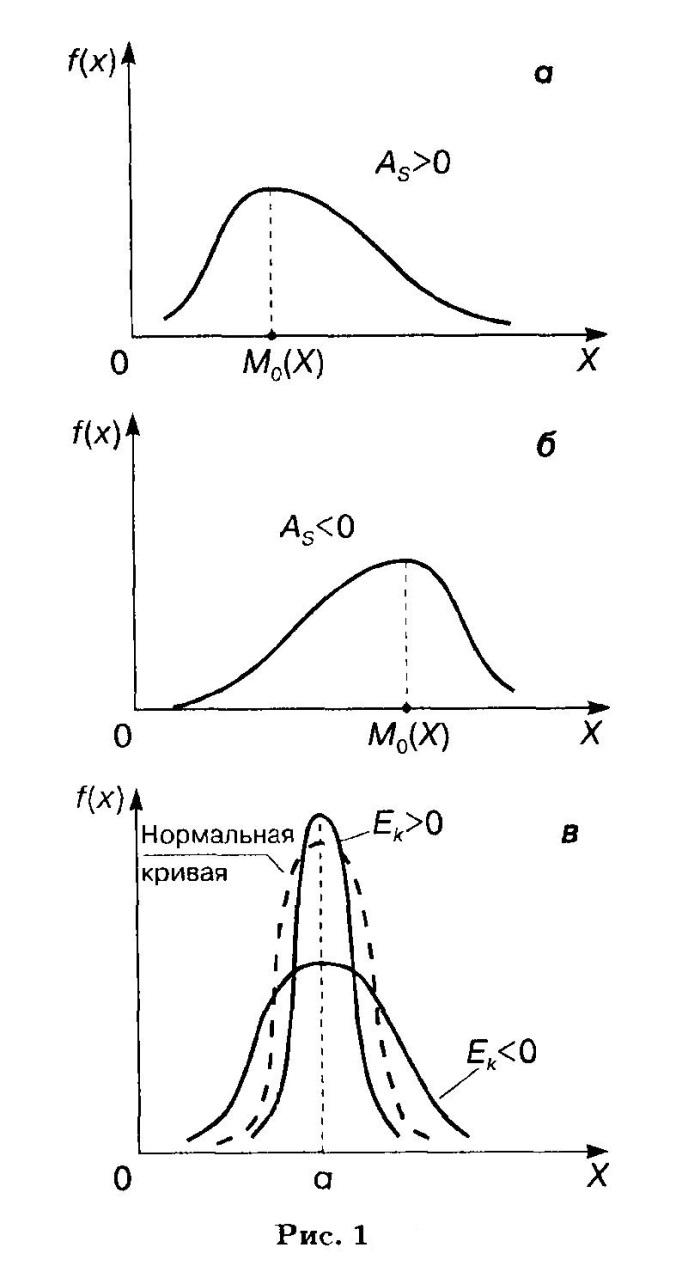
https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-XSRXk2.png

**Определение.** *Эксцессом*теоретического распределения на­зывается величина, определяемая равенством:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-HBW1gq.png

где https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-rUhywP.png‒ центральный момент четвертого порядка.

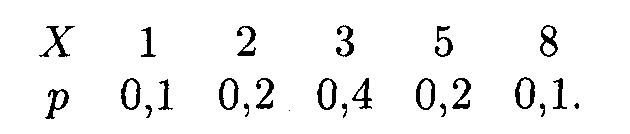
Для нормального распределения https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-ooxmQB.png. При отклоне­нии от нормального распределения асимметрия положительна, если "длинная" и более пологая часть кривой распределения расположена справа от точки на оси абсцисс, соответствую­щей моде; если эта часть кривой расположена слева от моды, то асимметрия отрицательна (рис. 1, а, б).



Эксцесс характеризует "крутизну" подъема кривой распре­деления по сравнению с нормальной кривой: если эксцесс поло­жителен, то кривая имеет более высокую и острую вершину; в случае отрицательного эксцесса сравниваемая кривая имеет более низкую и пологую вершину.

Следует иметь в виду, что при использовании указанных характеристик сравнения опорными являются предположения об одинаковых величинах математического ожидания и дис­персии для нормального и теоретического распределений.

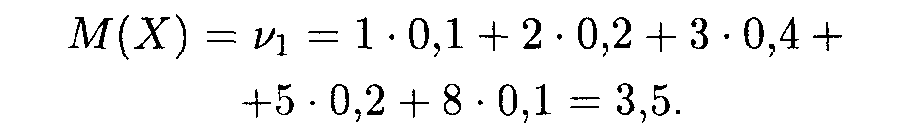
**Пример.** Пусть дискретная случайная величина *Х* задана законом распределения:



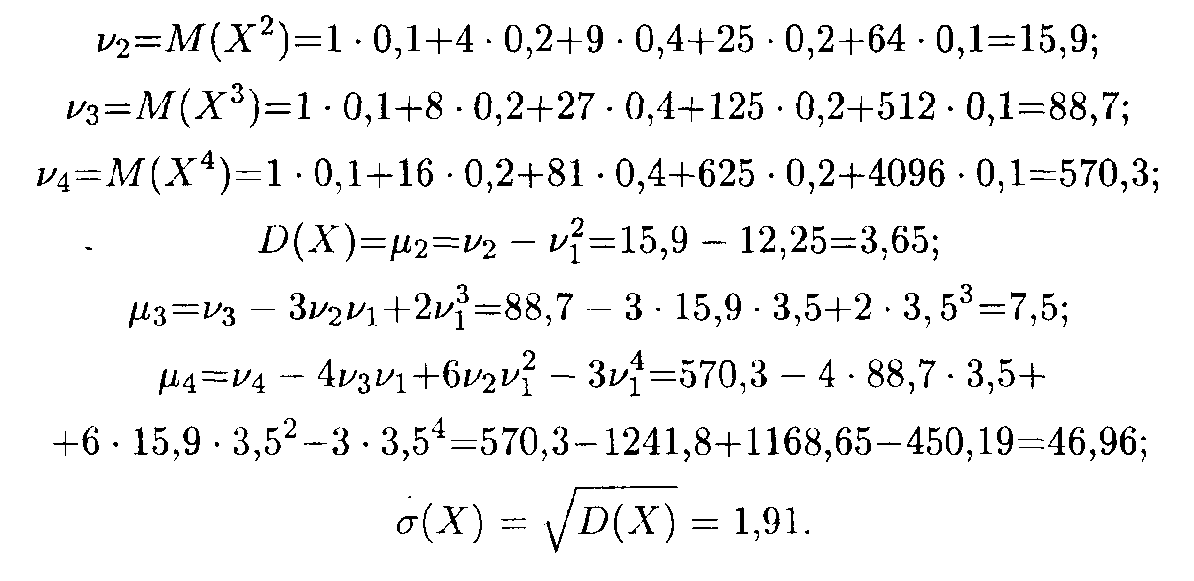
Найти: асимметрию и эксцесс теоретического распределения.

**Решение:**

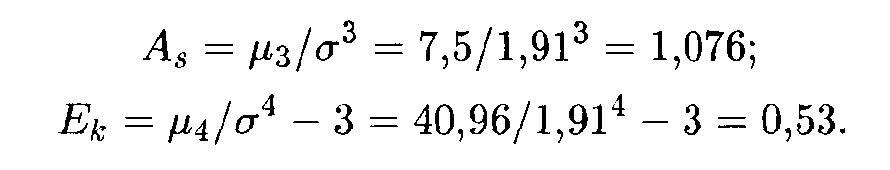
Найдем сначала математическое ожидание слу­чайной величины:



Затем вычисляем начальные и центральные моменты 2, 3 и 4-го порядков и среднее квадратическое отклонение:



Теперь по формулам находим искомые вели­чины:



В данном случае "длинная" часть кривой распределения рас­положена справа от моды, причем сама кривая является не­сколько более островершинной, чем нормальная кривая с теми же величинами математического ожидания и дисперсии.

**Неравенство Чебышева.**

**Теорема.**Для произвольной случайной величины *Х* и любого числа

Ԑ>0 справедливы неравенства:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-1qVC7_.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-Ic0Iyo.png

‒ вероятность противоположного неравенства.

**Пример.**

Средний расход воды на животноводческой ферме составляет 1000 л в день, а среднее квадратичное отклонение этой случайной величины не превышает 200 л. Оценить вероятность того, что расход воды на ферме в любой выбранный день не превзойдет 2000 л, используя неравенство Чебышева.

**Решение:**

Пусть *X* –расход воды на животноводческой ферме (л).

По условию *М*(*Х*) = 1000.

Дисперсия *D*(*X*) = https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-LJCx3A.pnghttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-UFtyz8.pnghttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-wG5WqT.png. Так как границы интервала 0https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-Alelbj.png*X*  https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-z4ao_S.png2000 симметричны относительно математического ожидания*М*(*Х*) = 1000, то для оценки вероятности искомого события можно применить неравенство Чебышева:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-LwcQRL.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-A5YONy.png

То есть не менее, чем 0,96https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-dayMNv.png.

Для биномиального распределения неравенство Чебышева примет вид:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-INklWE.png

так как *M*(X) = *np; D*(*X*)=*npq.*

# 3. Многомерные случайные величины (случайные векторы). Закон распределения многомерных случайных величин.

До сих пор рассматривались случайные величины, возможные значения которых, определялись одним числом. Такие случайные величины называются *одномерными*.

Выпадение определенного числа очков при подбрасывании игральных костей, являются примером одномерной дискретной случайной величины.

На практике встречаются случайные величины, значение которых определяется двумя, тремя и более числами. Такие случайные величины называются *многомерными*.

Например:

Координаты точки, брошенной на плоскость, являются двумерной случайной величиной.

**Определение**. Упорядоченную пару чисел (*Х*,*Y*) случайных величин (*Х* и *Y*) назовем *двумерной* случайной величиной или случайным вектором. Геометрически она представляет собой точку на координатной плоскости.

Двумерные случайные величины, также как и одномерные, делятся на *дискретные и непрерывные.*

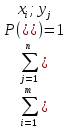
**Определение.***Законом распределения* дискретной двумерной случайной величины называется соответствие между возможными значениями (https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-IVrLEA.png) этой случайной величины и их вероятностями (https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-T_FMrn.png,

где https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-lxDOY8.png

Закон распределения дискретной двумерной случайной величины (*X*, *Y*) имеет вид:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-kNUWrU.png | https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-m3_NyP.png | https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-egTmqq.png | … | https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-FzJ_Al.png |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-qcYzhy.png | https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-pmkdg3.png;https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-y_Cb3P.png | *P*(https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-YvVnLP.png;https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-ENO0a2.png) | … | https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-JBqeao.png |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-HDTL9H.png | https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-Uv9hgG.png | *P*(https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-T5oBjs.png) | … | *Phttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-jGKMkt.png*) |
| … | … | … | … | … |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-8Uh4kk.png | *P*(https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-cc0so9.png) | *P*(https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-QHA8qS.png | … | *Р*(https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-Q7LTcf.png) |

Сумма вероятностей равна единице, то есть



## **Функция распределения, плотность вероятности. Вероятность попадания в заданную область и числовые характеристики случайных векторов.**

*Функцией распределения* двумерной случайной величины *F*(*x*;*y*) называется вероятность того, что случайная величина *X*примет значение, меньше *x* и при этом случайная величина *Y* примет значение, меньше *Y*.

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-uwyssg.png

*Плотностью вероятности* двумерной случайной величины называется вторая смешанная производная от функции распределения вероятностей:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-9t5rCR.png

Вероятность попадания двумерной случайной величины в прямоугольную область https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-Cengw5.pngнаходится по формуле:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-1y8Vfz.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-QXXZ0w.png

‒событие достоверно.

При изучении двумерных случайных величин рассматриваются числовые характеристики их одномерных составляющих. Для непрерывной случайной величины математическое ожидание и дисперсия находятся по формуле:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-Wb7d98.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-tdHejY.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-z3Jy_Y.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-0_GOsN.png

## **14. Условные законы распределения. Условные числовые характеристики двумерных случайных величин. Регрессия.**

Две случайные величины *X* и *Y*называются *независимыми*, если закон распределения одной из них не зависят от того, какие значения примет вторая величина.

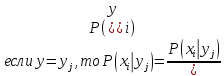
https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-3vVW20.png

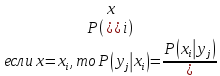
https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-ETA2Vt.png

*Условным знаком распределения* одной из одномерных составляющих двумерной случайной величины называется её закон распределения, составленный при условии, что вторая составляющая приняла определенное значение или попала в определенный интервал.

Вероятности этого распределения называются *условными вероятностями.*

Для дискретной случайной величины:





Для непрерывной случайной величины вероятности заменяются на плотности вероятностей:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-pkVs6d.png

*Условным математическим ожиданием* дискретной случайной величины *Y* при *X*= *x* называется сумма произведений всех возможных значений этой величины на их условные вероятности:

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-1TmJB5.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-uHXUPB.png

Условное математическое ожидание является функциями, которые называются *функциями регрессии*.

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-7Dg2ih.png

https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-iImyPz.png

Графики этих функций называются *линиями регрессии*.