**ЛЕКЦИОННОЕ ЗАНЯТИЕ**

**Тема: «Основные законы распределения дискретных случайных величин»**

## **1. Биномиальный закон распределения (биномиальное распределение) дискретных случайных величин.**

Дискретная случайная величина *Х* распределена по*биномиальному закону*, если она принимает значения 0,1,2…,*m*…,*n*… с вероятностями, которые находятся по формуле Бернулли:



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-RcsGID.png | 0 | 1 | … | *m* | … | *n* |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-aCf9QG.png | https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-UnxNDQ.png | https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-yQvzAh.png | … | https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-7N1O_j.png | … | https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-tKAUAk.png |





………………………………………………...



**Теорема.** Математическое ожидание дискретной случайной величины, распределенной по биномиальному закону, равняется произведению числа всех испытаний на вероятность наступления события в отдельном испытании, то есть

**.**

Дисперсия равняется произведению числа всех испытаний на вероятность наступления и не наступления события в отдельном испытании, то есть

*.*

**Пример.**

По статистическим данным известно, что вероятность рождения мальчика составляет: *p* = 0,515.

Составить закон распределения числа мальчиков в семье с пятью детьми. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонениеи моду.

**Решение:**

*X* ‒ случайная величина ‒ число мальчиков в семье с пятью детьми.

Составим закон распределения числа мальчиков в семье с пятью детьми:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-6AKSJH.png | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-MHl7JW.png | 0,026835 | 0,142475 | 0,302579 | 0,321296 | 0,170585 | 0,036227 |















Проверка:





1. Математическое ожидание:



2. Дисперсия:



3. Среднее квадратическое отклонение:



4. так как при*m* = 3 вероятность максимальная. Она составляет: *p* = 0,321296.

## **2. Геометрический закон распределения (геометрическое распределение) дискретных случайных величин.**

Дискретная случайная величина распределена *геометрически*, если она принимает значения 1,2,…*m*…(бесконечное, но счетное количество раз) с вероятностями, находящимися по формуле общего члена геометрической прогрессии:



Случайная величина *X*= *m*, распределенная геометрически, представляет собой число испытаний (*m*) до первого положительного исхода.

Составим ряд распределения:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-xhjhdJ.png | 1 | 2 | … | *m* | … |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-QtRTPy.png | *p* | https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-ivLzgd.png | … | https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-warYq2.png | … |

и т.д.

Теорема. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной геометрически, вычисляются по формулам:





**Пример.**

Охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более 4‒х выстрелов.

Составить закон распределения числа выстрелов, если вероятность попадания при одном выстреле равна *p* = 0,7. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и моду числа выстрелов.

**Решение:**

По условию 

число выстрелов

Составим закон распределения числа выстрелов:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-SHNrHy.png | 1 | 2 | 3 | 4 |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-Oe6Dad.png | 0,7 | 0,21 | 0,063 | 0,027 |













**Проверка:**



1. Математическое ожидание:



2. Дисперсия:



3. Среднее квадратическое отклонение:



4. так как при*m* = 1 вероятность максимальная, она составляет: *p* = 0,7.

**Пример.**

Вероятность поражения цели равна 0,6. Производится стрельба по мишени до первого попадания (число патронов не ограничено). Требуется составить ряд распределения числа сделанных выстрелов, найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины. Определить вероятность того, что для поражения цели потребуется не более трёх патронов.

**Решение:**

Случайная величина *X* - число сделанных выстрелов - имеет геометрическое распределение с параметром *p*=0,6. Ряд распределения *X* имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-Ub5EzV.png | 1 | 2 | 3 | ... | *m* | ... |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-kHRCV5.png | 0,6 | 0,24 | 0,096 | ... | 0,6·0,4*m* | ... |





Вероятность того, что для поражения цели потребуется не более трёх патронов:

*P*(*X*≤ 3) = *P*(*X*= 1) + *P*(*X*= 2) + *P*(*X*= 3) = 0,6+0,24+0,096 = 0,936.

# 3. Распределение Пуассона дискретных случайных величин.

Дискретная случайная величина распределена по закону Пуассона, если она принимает значения 0,1,2…*m*…*n*…, бесконечное, но счетное число раз, с вероятностями, определяемыми по формуле Пуассона:



где,*p*.

Закон распределения примет вид:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-XvXXh7.png | 0 | 1 | 2 | … | *m* | … |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-DwCE2T.png | https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-YpIcWp.png | https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-nHfgRk.png | https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-zl2PsQ.png | … | https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-lpAUwB.png | … |

,

и т.д.

**Теорема.**Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, равны параметру Пуассона.





**Пример 1.**

Станок изготавливает за смену 100000 деталей. Вероятность изготовления бракованной детали *p* = 0,0001.

Найти вероятность того, что за смену будет изготовлено 5 бракованных деталей.

**Решение:**

Обозначим *n* = 100 000, *k* = 5, *p* = 0,0001. События, состоящие в том, что отдельная деталь бракована, независимы, число испытаний *n* велико, а вероятность *p* мала, поэтому воспользуемся распределением Пуассона:



где





**Пример 2.**

Устройство состоит из 1000 элементов. Вероятность отказа любого элемента в течение времени *t* равна 0,002.

Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонениеи моду.

**Решение:**

*X* ‒ случайная величина ‒ число отказавших за время *t*элементов.

, . Следовательно, случайная величина распределена по закону Пуассона.

элемента

Составим закон распределения Пуассона:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-d64VX8.png | 0 | 1 | 2 | 3 | … | *m* | … |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-wT6aWe.png | 0,135335 | 0,270671 | 0,270671 | 0,180447 | … | https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-68Hici.png | … |







и т.д.

## **9. Непрерывная случайная величина. Функция распределения. Плотность вероятности. Вероятность попадания в заданный интервал.**

*Непрерывной случайной величиной* называют случайную величину, значения которой сплошь заполняют некоторый интервал.

Например, рост человека ‒ непрерывная случайная величина.

Функцией распределения случайной величины называют вероятность того, что случайная величина *Х* принимает значения, меньшие *х*.

***F*(*x*) = *P*( *X ***



Геометрически, формула *F*(*x*) = *P*(*X*означает, что все значения *Х* будут находиться, левее *х*. Функция *F*(*x*) называется интегральной функцией.

*Плотностью вероятности*непрерывной случайной величины *f*(*x*) называется производная от функции распределения этой случайной величины:



Следовательно, *F*(*x*) первообразная для *f*(*x*).

**Теорема.** Вероятность попадания непрерывной случайной величины *X* в интервал от *a* до *b* находится по формуле:



**Доказательство.**



**Следствие.** Если все возможные значения случайной величины



## **10. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины**

1. Математическое ожидание:



2. Дисперсия:



Преобразуем эту формулу:









‒ формула дисперсии для непрерывных случайных величин.

Тогда среднее квадратическое отклонение:



## **11. Основные законы распределения непрерывных случайных величин.**

## **1.Нормальный закон распределения.**

Из всех законов распределения для непрерывных случайных величин на практике чаще всего встречается *нормальный закон* распределения. Этот закон распределения является предельным, то есть все остальные распределения стремятся к нормальному.

**Теорема 1.**Непрерывная случайная величина распределена по *нормальному закону*с параметрами *а* и ,если плотность вероятности имеет вид:



Математическое ожидание случайной величины, распределённой по нормальному закону распределения, равно *а*, то естьдисперсия.

**Теорема 2.**Вероятность попадания непрерывной случайной величины, распределенной по нормальному закону распределения в интервал от *α* до *β*, находится по формуле:





**Пример.**

Полагая, что рост мужчин определенной возрастной группы есть нормально распределенная случайная величина  *X,* c параметрами *а* = 173 и = 36.

**Найти:** а) выражение плотности вероятностей и функции распределения случайной величины *X*;

б) долю костюмов 4-го роста (176 – 182 см) в общем объеме производства.

**Решение:**

Плотность вероятности нормально распределенной случайной величины:



Доля костюмов 4-го роста (176 – 182 см.) в общем объеме производства определяется по формуле как вероятность





0,2417100%24,2% ‒ доля костюмов 4-го роста в общем объеме производства.

Итак, функция плотности вероятностей нормального закона распределения имеет вид:



Тогда функция распределения:



|  |  |
| --- | --- |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-5VXNsb.png | https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-QsJE6A.png |

# 2.Показательный (экспоненциальный закон распределения).

Случайная величина *Х* распределена по *показательному закону* распределения с параметром *λ*, если её плотность вероятности имеет вид:



Функция распределения имеет вид:



Математическое ожидание и дисперсия для случайной величины, распределенной по показательному закону, находятся по формулам:















То есть при 

**Пример.**

Установлено, что время ремонта телевизоров есть случайная величина *X*, распределенная по показательному закону.

Определить вероятность того, что на ремонт телевизора потребуется не менее 20 дней, если среднее время ремонта телевизоров составляет 15 дней. Найти плотность вероятности, функцию распределения и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*.

**Решение:**

По условию математическое ожидание *M*(*х*)=1/λ = 15, откуда параметр *λ*= 1/15. Тогда плотность вероятности и функция распределения примут вид:



(*х* ≥0)

Искомую вероятность *P*(*Х* ≥20) можно было найти по формуле, интегрируя плотность вероятности, то есть

но проще это сделать, используя функцию распределения:



Найдем среднее квадратическое отклонение: σ(*X*) = *М*(*Х*) = 15 дней.

## **3.Равномерный закон распределения.**

Непрерывная случайная величина *Х* имеет *равномерный закон* распределения (закон постоянной плотности) на отрезке [*a*; *b*], если на этом отрезке функция плотности вероятности случайной величины постоянна, то есть

 *f*(*x*) имеет вид:





Следовательно, математическое ожидание случайной величины, равномерно распределенной на отрезке  (*a*, *b*), равняется середине этого отрезка.

         Дисперсия имеет вид:







Найдем вероятность попадания значения случайной величины, имеющей равномерное распределение, на интервал , принадлежащий целиком отрезку [*a*, *b*]:



Следовательно,



Функция распределения примет вид:









**Пример.**

Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ждать пассажиру придется не больше полминуты.

Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X* – времени ожидания поезда.

**Решение:**

Случайная величина *X* – время ожидания поезда на временном (в минутах) отрезке [0;2] имеет равномерный закон распределения  *f*(*x*)=1/2.

Поэтому вероятность того, что пассажиру придется ждать не более полминуты, равна 1/4 от равной единице площади прямоугольника, т.е.





Найдем математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение:







## **12. Вероятность заданного отклонения. Правило трех сигм.**

**Теорема.**Вероятность модуля отклонения непрерывной случайной величины X от её математического ожидания на величину сколь угодно малого числа ε>0 находится по формуле:

**(\*)**

Доказательство:

Так как



то





Следовательно,



**Правило трёх сигм.**

Пусть .

Подставим значение ε в формулу (\*), получим:



Вывод:

Итак, с вероятностью сколь угодно близкой к единице можно утверждать, что модуль отклонения нормально распределенной случайной величины от её математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.

**Центральная предельная теорема.**

Центральная предельная теорема представляет собой группу теорем, посвященных установлению условий, при которых возникает нормальный закон распределения. Среди этих теорем важнейшее место принадлежит теореме Ляпунова.

**Теорема Ляпунова.**

Если случайная величина *Х* представляет собой сумму большого числа взаимно ‒ независимых случайных величин, то есть, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то случайная величина*Х* имеет распределение, неограниченно приближающееся к нормальному распределению.

**Начальные и центральные моменты непрерывной случайной величины, асимметрия и эксцесс. Мода и медиана.**

В прикладных задачах, например в математической ста­тистике, при теоретическом изучении эмпирических распре­делений, отличающихся от нормального распределения, воз­никает необходимость количественных оценок этих различий. Для этой цели введены специальные безразмерные характеристики.

**Определение.** *Мода непрерывной случайной величины ( Мо (X))*– это её наиболее вероятное значение, для которого вероятность p*i* или плотность вероятности f(x) достигает максимума.

**Определение.** *Медиана непрерывной случайной величины X (Me(X))* – это такое её значение, для которого выполняется равенство:

P (X < Me (X)) = P (X >Me (X)) = 

Me (X)

x

f(x)

Геометрически вертикальная прямая x = Me (X) делит площадь фигуры под кривой на две равные части.

В точке X = Me (X), функция распределения F (Me (X)) = 

Пример:

Найти моду Mo, медиану Me и математическое ожидание M случайной величины X с плотностью вероятности f(x) = 3x2, при x Î [ 0; 1 ].

Решение:

0

1

1. Плотность вероятности f (x) максимальна при x = 1, т.е. f (1) = 3, следовательно, Mo (X) = 1 на интервале [ 0; 1 ].
2. Для нахождения медианы обозначим Me (X) = b.

Так как Me (X) удовлетворяет условию P (X < Me (X)) = ,

то P (-∞ < X < b) =  = =

= = b3 = .

b3 = ; b = » 0,79

1. M (X) = =+=

== =  = 0,75

Отметим получившиеся 3 значения Mo (x), Me (X), M (X) на оси Ox:



**Определение.** *Асимметрией* теоретического распределения называется отношение центрального момента третьего поряд­ка к кубу среднего квадратического отклонения:



**Определение.** *Эксцессом*теоретического распределения на­зывается величина, определяемая равенством:



где ‒ центральный момент четвертого порядка.

Для нормального распределения . При отклоне­нии от нормального распределения асимметрия положительна, если "длинная" и более пологая часть кривой распределения расположена справа от точки на оси абсцисс, соответствую­щей моде; если эта часть кривой расположена слева от моды, то асимметрия отрицательна (рис. 1, а, б).



Эксцесс характеризует "крутизну" подъема кривой распре­деления по сравнению с нормальной кривой: если эксцесс поло­жителен, то кривая имеет более высокую и острую вершину; в случае отрицательного эксцесса сравниваемая кривая имеет более низкую и пологую вершину.

Следует иметь в виду, что при использовании указанных характеристик сравнения опорными являются предположения об одинаковых величинах математического ожидания и дис­персии для нормального и теоретического распределений.

**Пример.** Пусть дискретная случайная величина *Х* задана законом распределения:



Найти: асимметрию и эксцесс теоретического распределения.

**Решение:**

Найдем сначала математическое ожидание слу­чайной величины:



Затем вычисляем начальные и центральные моменты 2, 3 и 4-го порядков и среднее квадратическое отклонение:



Теперь по формулам находим искомые вели­чины:



В данном случае "длинная" часть кривой распределения рас­положена справа от моды, причем сама кривая является не­сколько более островершинной, чем нормальная кривая с теми же величинами математического ожидания и дисперсии.

**Неравенство Чебышева.**

**Теорема.**Для произвольной случайной величины *Х* и любого числа

Ԑ>0 справедливы неравенства:





‒ вероятность противоположного неравенства.

**Пример.**

Средний расход воды на животноводческой ферме составляет 1000 л в день, а среднее квадратичное отклонение этой случайной величины не превышает 200 л. Оценить вероятность того, что расход воды на ферме в любой выбранный день не превзойдет 2000 л, используя неравенство Чебышева.

**Решение:**

Пусть *X* –расход воды на животноводческой ферме (л).

По условию *М*(*Х*) = 1000.

Дисперсия *D*(*X*) = . Так как границы интервала 0*X*  2000 симметричны относительно математического ожидания*М*(*Х*) = 1000, то для оценки вероятности искомого события можно применить неравенство Чебышева:





То есть не менее, чем 0,96.

Для биномиального распределения неравенство Чебышева примет вид:



так как *M*(X) = *np; D*(*X*)=*npq.*

# 3. Многомерные случайные величины (случайные векторы). Закон распределения многомерных случайных величин.

До сих пор рассматривались случайные величины, возможные значения которых, определялись одним числом. Такие случайные величины называются *одномерными*.

Выпадение определенного числа очков при подбрасывании игральных костей, являются примером одномерной дискретной случайной величины.

На практике встречаются случайные величины, значение которых определяется двумя, тремя и более числами. Такие случайные величины называются *многомерными*.

Например:

Координаты точки, брошенной на плоскость, являются двумерной случайной величиной.

**Определение**. Упорядоченную пару чисел (*Х*,*Y*) случайных величин (*Х* и *Y*) назовем *двумерной* случайной величиной или случайным вектором. Геометрически она представляет собой точку на координатной плоскости.

Двумерные случайные величины, также как и одномерные, делятся на *дискретные и непрерывные.*

**Определение.***Законом распределения* дискретной двумерной случайной величины называется соответствие между возможными значениями () этой случайной величины и их вероятностями (,

где 

Закон распределения дискретной двумерной случайной величины (*X*, *Y*) имеет вид:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-kNUWrU.png | https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-m3_NyP.png | https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-egTmqq.png | … | https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-FzJ_Al.png |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-qcYzhy.png | https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-pmkdg3.png;https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-y_Cb3P.png | *P*(https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-YvVnLP.png;https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-ENO0a2.png) | … | https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-JBqeao.png |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-HDTL9H.png | https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-Uv9hgG.png | *P*(https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-T5oBjs.png) | … | *Phttps://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-jGKMkt.png*) |
| … | … | … | … | … |
| https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-8Uh4kk.png | *P*(https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-cc0so9.png) | *P*(https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-QHA8qS.png | … | *Р*(https://studfile.net/html/2706/62/html_GVIbCzybZC.LuBR/img-Q7LTcf.png) |

Сумма вероятностей равна единице, то есть



## **Функция распределения, плотность вероятности. Вероятность попадания в заданную область и числовые характеристики случайных векторов.**

*Функцией распределения* двумерной случайной величины *F*(*x*;*y*) называется вероятность того, что случайная величина *X*примет значение, меньше *x* и при этом случайная величина *Y* примет значение, меньше *Y*.



*Плотностью вероятности* двумерной случайной величины называется вторая смешанная производная от функции распределения вероятностей:



Вероятность попадания двумерной случайной величины в прямоугольную область находится по формуле:





‒событие достоверно.

При изучении двумерных случайных величин рассматриваются числовые характеристики их одномерных составляющих. Для непрерывной случайной величины математическое ожидание и дисперсия находятся по формуле:









## **14. Условные законы распределения. Условные числовые характеристики двумерных случайных величин. Регрессия.**

Две случайные величины *X* и *Y*называются *независимыми*, если закон распределения одной из них не зависят от того, какие значения примет вторая величина.





*Условным знаком распределения* одной из одномерных составляющих двумерной случайной величины называется её закон распределения, составленный при условии, что вторая составляющая приняла определенное значение или попала в определенный интервал.

Вероятности этого распределения называются *условными вероятностями.*

Для дискретной случайной величины:





Для непрерывной случайной величины вероятности заменяются на плотности вероятностей:



*Условным математическим ожиданием* дискретной случайной величины *Y* при *X*= *x* называется сумма произведений всех возможных значений этой величины на их условные вероятности:





Условное математическое ожидание является функциями, которые называются *функциями регрессии*.





Графики этих функций называются *линиями регрессии*.