**ЛЕКЦИОННОЕ ЗАНЯТИЕ**

**Тема: «Дискретные случайные величины»**

***Случайной*** называют *величину*, которая в результате испытания примет **одно и только одно** числовое значение, зависящее от случайных факторов и заранее непредсказуемое.

Случайные величины, как правило, **обозначают** через http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image002.gif , а их значения – соответствующими маленькими буквами с подстрочными индексами, например, http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image004.gif.

*Иногда используют http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image006.gif, а также греческие буквы*

Пример встретился нам на [**первом же уроке по теории вероятностей**](http://www.mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html), где мы фактически рассмотрели следующую случайную величину:

http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image008.gif – количество очков, которое выпадет после броска игрального кубика.

В результате данного испытания выпадет **одна и только** грань, какая именно – не предсказать *(фокусы не рассматриваем)*; при этом случайная величина http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image008_0000.gif может принять одно из следующий значений:

http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image010.gif.

Пример из статьи о [**Статистическом определении вероятности**](http://www.mathprofi.ru/statisticheskoe_opredelenie_verojatnosti.html):

http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image012.gif – количество мальчиков среди 10 новорождённых.

Совершенно понятно, что это количество заранее не известно, и в очередном десятке родившихся детей может оказаться:

http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image014.gif, либо http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image016.gif мальчиков – **один и только один** из перечисленных вариантов.

И, дабы соблюсти форму, немного физкультуры:

http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image018.gif –  дальность прыжка в длину *(в некоторых единицах)*.

Её не в состоянии предугадать даже мастер спорта :)

Тем не менее, ваши гипотезы?

Коль скоро речь идёт о [**множестве действительных чисел**](http://www.mathprofi.ru/mnozhestva.html), то случайная величина http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image018_0000.gifможет принять *несчётно много* значений из некоторого числового промежутка. И в этом состоит её принципиальное отличие от предыдущих примеров.

Таким образом, **случайные величины целесообразно разделить на 2 большие группы**:

1. Дискретная *(прерывная)* случайная величина – принимает отдельно взятые, изолированные значения. Количество этих значений *конечно* либо *бесконечно, но счётно.*

…нарисовались непонятные термины? Срочно повторяем [**основы алгебры**](http://www.mathprofi.ru/mnozhestva.html)!

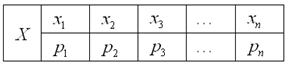
2) Непрерывная случайная величина – принимает **все** числовые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

***Примечание****: в учебной литературе популярны аббревиатуры ДСВ и НСВ*

Сначала разберём дискретную случайную величину, затем – [**непрерывную**](http://www.mathprofi.ru/nepreryvnaya_sluchaynaya_velichina.html).

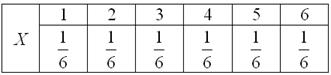
Поехали:

**Закон распределения дискретной случайной величины**

– это*соответствие* между возможными значениями этой величины и их вероятностями. Чаще всего закон записывают таблицей:  
  
Довольно часто встречается термин ***ряд****распределения*, но в некоторых ситуациях он звучит двусмысленно, и поэтому я буду придерживаться «закона».

А теперь **очень важный момент**: поскольку случайная величина http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image008_0001.gif *обязательно* примет **одно из значений** http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image022.gif, то соответствующие события образуют [**полную группу**](http://www.mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html) и сумма вероятностей их наступления равна единице:  
http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image024.gif

или, если записать свёрнуто:  
http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image026.gif

Так, например, закон распределения вероятностей выпавших на кубике очков имеет следующий вид:  


Без комментариев.

Возможно, у вас сложилось впечатление, что дискретная случайная величина может принимать только «хорошие» целые значения. Развеем иллюзию – они могут быть любыми:

Пример 1

Некоторая игра имеет следующий закон распределения выигрыша:  
http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image030.jpg

Найти http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image032.gif

…наверное, вы давно мечтали о таких задачах :) Открою секрет – я тоже. В особенности после того, как завершил работу над [**теорией поля**](http://www.mathprofi.ru/teoriya_polya.html).

**Решение**: так как случайная величина http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image034.gif может принять только одно из трёх значений, то соответствующие события образуют *полную группу*, а значит, сумма их вероятностей равна единице:  
http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image036.gif

Разоблачаем «партизана»:  
http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image038.gif  
http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image040.gif – таким образом, вероятность выигрыша http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image042.gif условных единиц составляет 0,4.

Контроль: http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image044.gif, в чём и требовалось убедиться.

**Ответ**: http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image046.gif

Не редкость, когда закон распределения требуется составить самостоятельно. Для этого используют [**классическое определение вероятности**](http://www.mathprofi.ru/zadachi_na_klassicheskoe_opredelenie_verojatnosti_primery_reshenij.html), [**теоремы умножения / сложения вероятностей событий**](http://www.mathprofi.ru/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html) и другие фишки **[тервера](http://www.mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html)**:

Пример 2

В коробке находятся 50 лотерейных билетов, среди которых 12 выигрышных, причём 2 из них выигрывают по 1000 рублей, а остальные – по 100 рублей. Составить закон распределения случайной величины http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image048.gif – размера выигрыша, если из коробки наугад извлекается один билет.

**Решение**: как вы заметили, значения случайной величины принято располагать в порядке их возрастания. Поэтому мы начинаем с самого маленького выигрыша, и именно http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image050.gif рублей.

Всего таковых билетов 50 – 12 = 38, и по [**классическому определению**](http://www.mathprofi.ru/zadachi_na_klassicheskoe_opredelenie_verojatnosti_primery_reshenij.html):  
http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image052.gif – вероятность того, что наудачу извлечённый билет окажется безвыигрышным.

С остальными случаями всё просто. Вероятность выигрыша http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image054.gif рублей составляет:  
http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image056.gif

И для http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image058.gif:  
http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image060.gif

Проверка: http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image062.gif – и это особенно приятный момент таких заданий!

**Ответ**: искомый закон распределения выигрыша:  
http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image064.jpg

Следующее задание для самостоятельного решения:

Пример 3

Вероятность того, что стрелок поразит мишень, равна http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image066.gif. Составить закон распределения случайной величины http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image068.gif – количества попаданий после 2 выстрелов.

…я знал, что вы по нему соскучились :) Вспоминаем [**теоремы умножения и сложения**](http://www.mathprofi.ru/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html). Решение и ответ в конце урока.

Закон распределения полностью описывает случайную величину, однако на практике бывает полезно (а иногда и полезнее) знать лишь некоторые её ***числовые характеристики***.

**Математическое ожидание дискретной случайной величины**

Говоря простым языком, это *среднеожидаемое значение* при многократном повторении испытаний. Пусть случайная величина http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image008_0002.gif принимает значения http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image022_0000.gif с вероятностями http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image072.gif соответственно. Тогда математическое ожидание http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image074.gif данной случайной величины равно *сумме произведений* всех её значений на соответствующие вероятности:

http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image076.gif

или в свёрнутом виде:  
http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image777.gif

Вычислим, например, математическое ожидание случайной величины http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image008_0003.gif – количества выпавших на игральном кубике очков:

http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image078.gif очка

В чём состоит вероятностный смысл полученного результата? Если подбросить кубик достаточно много раз, то *среднее значение* выпавших очков будет близкО к 3,5 – и чем больше провести испытаний, тем ближе. Собственно, об этом эффекте я уже подробно рассказывал на уроке о [**статистической вероятности**](http://www.mathprofi.ru/statisticheskoe_opredelenie_verojatnosti.html).

Теперь вспомним нашу гипотетическую игру:  
http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image080.jpg

Возникает вопрос: а выгодно ли вообще играть в эту игру? …у кого какие впечатления? Так ведь «навскидку» и не скажешь! Но на этот вопрос можно легко ответить, вычислив математическое ожидание, по сути – *средневзвешенный* по вероятностям выигрыш:

http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image082.gif, таким образом, математическое ожидание данной игры **проигрышно**.

Не верь впечатлениям – верь цифрам!

Да, здесь можно выиграть 10 и даже 20-30 раз подряд, но на длинной дистанции нас ждёт неминуемое разорение. И я бы не советовал вам играть в такие игры :) Ну, может, только [**ради развлечения**](http://www.mathprofi.ru/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli.html).

Из всего вышесказанного следует, что математическое ожидание – это уже НЕ СЛУЧАЙНАЯ величина.

Творческое задание для самостоятельного исследования:

Пример 4

Мистер Х играет в европейскую рулетку по следующей системе: постоянно ставит 100 рублей на «красное». Составить закон распределения случайной величины http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image008_0004.gif – его выигрыша. Вычислить математическое ожидание выигрыша и округлить его до копеек. Сколько *в среднем*

проигрывает игрок с каждой поставленной сотни?

***Справка****: европейская рулетка содержит 18 красных, 18 чёрных и 1 зелёный сектор («зеро»). В случае выпадения «красного» игроку выплачивается удвоенная ставка, в противном случае она уходит в доход казино*

Существует много других систем игры в рулетку, для которых можно составить свои таблицы вероятностей. Но это тот случай, когда нам не нужны никакие законы распределения и таблицы, ибо доподлинно установлено, что математическое ожидание игрока будет точно таким же. От системы к системе меняется лишь [**дисперсия**](http://www.mathprofi.ru/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny.html), о которой мы узнаем во 2-й части урока.

Но прежде будет полезно размять пальцы на клавишах калькулятора:

Пример 5

Случайная величина http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image008_0005.gif задана своим законом распределения вероятностей:  
http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image085.jpg

Найти http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image087.gif, если известно, что http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image089.gif. Выполнить проверку.

Есть?

Тогда переходим к изучению [**дисперсии дискретной случайной величины**](http://www.mathprofi.ru/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny.html), и по возможности, **ПРЯМО СЕЙЧАС!!** – чтобы не потерять нить темы.

Решения и ответы:

*Пример 3.****Решение****: по условию http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image066_0000.gif – вероятность попадания в мишень. Тогда:*  
*http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image092.gif – вероятность промаха.*

*Составим http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image068_0000.gif – закон распределения попаданий при двух выстрелах:*

*http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image094.gif – ни одного попадания. По*[***теореме умножения вероятностей независимых событий***](http://www.mathprofi.ru/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html)*:*  
*http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image096.gif*

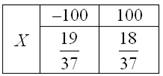
*http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image098.gif – одно попадание. По*[***теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения независимых событий***](http://www.mathprofi.ru/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html)*:*  
*http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image100.gif*

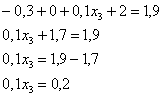
*http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image102.gif – два попадания. По теореме умножения вероятностей независимых событий:*  
*http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image104.gif*

*Проверка: 0,09 + 0,42 + 0,49 = 1*

***Ответ****: http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image106.jpg*

***Примечание****: можно было использовать обозначения http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image108.gif – это не принципиально.*

*Пример 4.****Решение****: игрок выигрывает 100 рублей в 18 случаях из 37, и поэтому закон распределения его выигрыша имеет следующий вид:*  
**   
*Вычислим математическое ожидание:*  
*http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image112.gif*   
*Таким образом, с каждой поставленной сотни игрок в среднем проигрывает 2,7 рубля.*

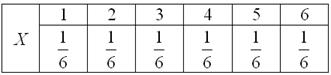
*Пример 5.****Решение****: по определению математического ожидания:*  
*http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image114.gif*   
*поменяем части местами и проведём упрощения:*  
**  
*таким образом:*  
*http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image118.gif*

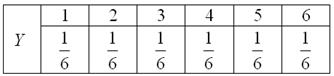
*Выполним проверку:*  
*http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image120.gif*  
*http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image122.gif, что и требовалось проверить.*

***Ответ****: http://www.mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image124.gif*

**Система случайных величин. Задачи с решениями**

Одна [**случайная величина**](https://mathprofi.net/sluchainaya_velichina.html)– хорошо, а две – лучше, а ещё лучше – их **система**, которую также называют **двумерной случайной величиной**. Кроме того, можно рассмотреть системы трёх и большего количества величин, но это уже будет слишком хорошо, а оно, как известно, плохо :)  Продолжаем разговор о случайных величинах (СВ), и для тех, кто не в теме, я сразу привёл ссылку выше.

Вспоминаем  пример с игральным кубиком (костью), где мы рассмотрели случайную величину https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image002.gif – количество очков, выпавших в результате его броска. В правильных руках правильный кубик даёт следующий [**закон распределения вероятностей**](https://mathprofi.net/sluchainaya_velichina.html):   


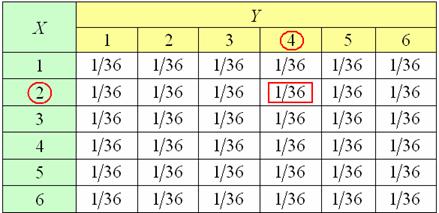
Теперь рассмотрим другой такой же кубик и случайную величину https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image006.gif – количество очков, выпавших на этом кубике. Очевидно, что вероятности выпадения его граней будут точно такими же:  


Что мы имеем? **Две случайные величины**. Но это пока что не система, как, например, не являются системой отдельно взятые **[диффуры](https://mathprofi.net/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii.html)**. О системе речь заходит, когда мы рассматриваем эти величины ВМЕСТЕ, например, при подбрасывании костей в игре.

Построим **закон распределения вероятностей системы**https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image010.gif. Так как результат броска одного кубика **никак не влияет** на количество очков, выпавших на другом кубике, то случайные величины https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image012.gif являются **независимыми**.

По [**теореме умножения вероятностей независимых событий**](https://mathprofi.net/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html), вероятность выпадения любой возможной комбинации очков постоянна и равна https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image014.gif. Закон распределения вероятностей можно записать аналитически:

https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image016.gif – вероятность выпадения любой пары https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image018.gif, где случайные величины могут принять одно из следующих значений: https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image020.gif, https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image022.gif.

Но в произвольной задаче вероятности чаще бывают разными, и поэтому на практике широко распространена табличная запись системы. Тот случай, когда копипаст не просто полезен, а очень полезен:  
  
Устройство таблицы очевидно, но на всякий случай я обвёл красным один пример: вероятность того, что случайная величина https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image002_0000.gif примет значение 2 и случайная величина https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image006_0000.gif значение 4 записывается в ячейку, расположенную на пересечении 2-й строки и 4-го столбца.

Обратите внимание, что **сумма всех вероятностей равна единице**, это означает, что в таблице учтены все возможные исходы ([**полная группа**](https://mathprofi.net/teorija_verojatnostei.html)), и в результате броска двух кубиков достоверно появится одна из 36 пар.

Помимо [**дискретных**](https://mathprofi.net/sluchainaya_velichina.html), систему могут образовывать и [**непрерывные случайные величины**](https://mathprofi.net/nepreryvnaya_sluchaynaya_velichina.html). За примером далеко ходить не будем: предположим, что мы бросаем игральный кубик в некую цель, например, в коробку. Тогда уместно рассмотреть следующую **двумерную случайную величину**: https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image028.gif, где https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image030.gif – случайное отклонение от цели «по горизонтали» (влево/вправо) и https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image032.gif – случайное отклонение от цели в длину (ближе/дальше).

Кстати, есть ли отличие между понятиями «система двух случайных величин» и «двумерная случайная величина»? – в различных источниках информации используют и тот, и другой термин. С моей точки зрения, отличие есть. **Двумерная** или **большемерная случайная величина**, как правило, порождается в результате конкретного испытания, зачастую (но не обязательно) с одним объектом, пожалуйста – тот же бросок кубика в цель. Понятие же **системы** более формально: один кубик может подбрасывать бабушка на кухне, а другой дедушка в коридоре, или даже ничего не подбрасывать, а совершать прыжки в длину. Но математика-то не запрещает рассмотреть соответствующие СВ единой системой! А психиатрия вообще приветствует.

Пример 1

Независимые случайные величины https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image012_0000.gif принимают только целые значения:

https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image002_0001.gif – от 1 до 13 с равными вероятностями;  
https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image006_0001.gif – от 1 до 16 с равными вероятностями.

Найти https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image036.gif – вероятность того, что в очередном испытании сумма появившихся чисел будет меньше шести.

**Решение**:предложенные случайные величины можно ассоциировать с нестандартными игральными костями, на одной из которых 13, а на другой – 16 граней.

Из условия следует, что:  
– вероятность того, что случайная величина https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image002_0002.gif примет какое-либо значение равна  https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image038.gif;   
– вероятность того, что случайная величина https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image006_0002.gif примет какое-либо значение равна  https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image041.gif.

Так как случайные величины независимы, то по [**теореме умножения вероятностей независимых событий**](https://mathprofi.net/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html), вероятность появления любой пары чисел https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image018_0000.gif в очередном испытании постоянна и равна: https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image044.gif. Заметьте, что рассмотрение пар **уже**констатирует тот факт, что мы рассматриваем СИСТЕМУ случайных величин, а не их по отдельности.

Подсчитаем количество пар, соответствующих событию https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image046.gif:

сумме https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image048.gif соответствует единственная пара https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image050.gif;

сумме https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image052.gif – пары https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image054.gif;

сумме https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image056.gif  – пары https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image058.gif

и сумме https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image060.gif: https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image062.gif.

**Итого**: 10 нужных пар.

По [**теореме сложения вероятностей несовместных событий**](https://mathprofi.net/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html):  
https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image064.gif – вероятность того, что сумма появившихся чисел будет меньше шести

**Ответ**: https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image066.gif

Но то, конечно, была разминка:

Пример 2

Две независимые дискретные случайные величины https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image002_0003.gif и https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image006_0003.gif заданы своими законами распределения вероятностей:  
https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image070.jpg

Нет, это не опечатка, случайные величины имеют одинаковые законы распределения. Здесь их удобно ассоциировать с двумя одинаковыми и независимо работающими палатами игровыми автоматами, на которых с определенными вероятностями загораются пронумерованные лампочки.

Требуется:

1) Найти закон распределения вероятностей системы случайных величин и вычислить:  
https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image072.gif – [**математическое ожидание**](https://mathprofi.net/sluchainaya_velichina.html) случайной величины https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image002_0004.gif, при условии, что другая величина приняла значение https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image075.gif;  
https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image077.gif – математическое ожидание случайной величины https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image006_0004.gif, при условии https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image080.gif.

2) Вычислить https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image700.gif – вероятности того, что случайная величина https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image010.gif примет значение из соответствующих двумерных областей.

3) Найти закон распределения вероятностей случайной величины https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image082.gif. Вычислить математическое ожидание https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image084.gif и дисперсию https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image086.gif.

4) Вычислить https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image088.gif

В реальной работе вам может встретиться и то, и другое, и третье и четвёртое, поэтому разбираемся во всём осознанно и очень внимательно.

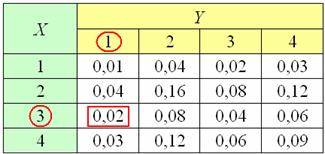
**Решение**:

**1)** Составим закон распределения вероятностей системы https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image010_0000.gif случайных величин.

 «Исковые» вероятности будем обозначать как обычно:  
https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image090.gif,   
а к «игровым» вероятностям добавим «птичку»:  
https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image092.gif

Вычисления стандартно начнём с наименьшего «икса» и «игрека». Найдём https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image094.gif – вероятность того, что случайная величина https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image002_0005.gif примет значение https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image097.gif [**и**](https://mathprofi.net/teorija_verojatnostei.html) случайная величина https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image006_0005.gif значение https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image100.gif. По условию, случайные величины независимы, и коль скоро так, то по [**теореме умножения вероятностей независимых событий**](https://mathprofi.net/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html):  
https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image102.gif

Найдём https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image104.gif – вероятность того, что https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image106.gif:  
https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image108.gif

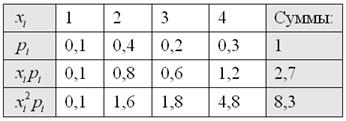
И так далее. Вычисления удобно проводить на калькуляторе или даже устно, а результаты заносить в таблицу. В качестве ещё одного примера я вычислил и отметил красным цветом вероятность https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image110.gif – того, что случайные величины примут значения https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image112.gif:  
  
Это и есть закон распределения системы https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image010_0001.gif. Не забываем проверить, что сумма всех вероятностей равна единице. Кстати, это ещё не значит, что ошибок нет. Для большей уверенности следует просуммировать вероятности по строкам – в результате должны получиться https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image090_0000.gif, т.е. закон распределения случайной величины https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image002_0006.gif; и просуммировать вероятности по столбцам – в результате должны получиться «игровые» вероятности https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image092_0000.gif величины https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image006_0006.gif.

Для системы СВ не вводится понятия «общего» [**математического ожидания**](https://mathprofi.net/sluchainaya_velichina.html), однако можно подсчитать мат ожидания **условные** – при условии, что одна из величин примет или уже приняла некоторое конкретное значение.

Вычислим https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image119.gif – математическое ожидание случайной величины https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image002_0007.gif, **при условии**, что другая величина приняла значение https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image075_0000.gif. Так как случайные величины независимы, то распределение случайной величины https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image002_0008.gif **не зависит** от того, какое значение приняла случайная величина https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image006_0007.gif. А значит, при любом возможном значении «игрек» условные математические ожидания:  
https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image122.gif – в точности равны мат ожиданию самой случайной величины https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image002_0009.gif.

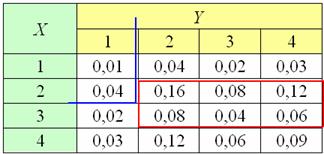
Логично? Представьте, что на 2-м игровом автомате зажглась лампочка (любая). Ну и что с того? Первый же автомат работает независимо!

Следует отметить, что с [**зависимыми величинами**](https://mathprofi.net/zavisimye_i_nezavisimye_sluchainye_velichiny.html) всё не так, и на следующем уроке мы разберём алгоритм вычисления условного мат ожидания, который формально пригоден и для независимых величин.

Ну а пока нам достаточно найти [**математическое ожидание**](https://mathprofi.net/sluchainaya_velichina.html)https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image124.gif, и заодно сразу вычислим [**дисперсию**](https://mathprofi.net/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny.html), потребуется позже:  
  
Таким образом:   
https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image128.gif  
https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image130.gif

С вероятностью https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image077_0000.gif аналогично – представьте, что на «исковом» игровом автомате зажглась лампочка №4. Ну и что? Это никак не повлияло на «игровой» автомат и его мат ожидание, поэтому:  
https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image132.gif – даже считать не пришлось, т.к. наши случайные величины имеют одинаковые распределения вероятностей.

**2)** Вычислим вероятность https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image701.gif – того, что случайная величина https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image010.gif примет значение из области, которую задают неравенства в скобках.

По [**аналогии с одномерным случаем**](https://mathprofi.net/funkcia_raspredeleniya_dsv.html), это можно сделать с помощью функции распределения вероятностей. Но для двумерной СВ [**составить такую функцию**](https://mathprofi.net/dvumernaya_nepreryvnaya_sluchaynaya_velichina.html) – не то, чтобы сложное, но весьма кропотливое занятие, и поэтому здесь проще просуммировать вероятности, соответствующие условиям https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image702.gif. На рисунке ниже я обвёл их красным цветом, и обратите внимание, что в силу строгости неравенства https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image703.gif, строку https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image704.gif не следует включать в эту область. Таким образом: https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image705.gif – вероятности я привык суммировать по строкам слева направо.  
  
Аналогично, область https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image707.gif  отграничена синим цветом, и здесь не следует учитывать значение https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image708.gif. В результате: https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image709.gif – вероятность того, что компонента https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image002_0009.gif примет значения, не превосходящее двух, **и** компонента https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image006_0006.gif – значение, меньшее двух.

И с вероятностью https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image710.gif всё просто. Поскольку на переменную «икс» не наложено никаких ограничений, то она может быть любой, но вот то, что «игрек» окажется больше четырёх – есть событие невозможное. Поэтому https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image711.gif.

Точно по такому же принципу вычисляются вероятности и зависимости случайных величин https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image002_0009.gif, https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image006_0006.gif. Тут разницы нет.

**3**) Найдем закон распределения вероятностей случайной величины https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image082_0000.gif.

**Принципиальным отличием от предыдущих пунктов** является то, что здесь речь идёт об одномерной случайной величине. Как получаются её значения? С помощью суммирования случайных значений https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image135.gif, которые могут принять величины https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image012_0001.gif. И нам нужно перебрать все возможные варианты.

Начать удобно с самой маленькой возможной суммы, её образует пара https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image138.gif, в результате чего случайная величина «зет» примет значение https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image140.gif с вероятностью:  
https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image142.gif

Может ли сумма равняться трём? Может. Исходу https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image144.gif соответствуют пары https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image146.gif. По [**теоремам умножения вероятностей независимых**](https://mathprofi.net/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html) и [**сложения несовместных событий**](https://mathprofi.net/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html):  
https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image148.gif

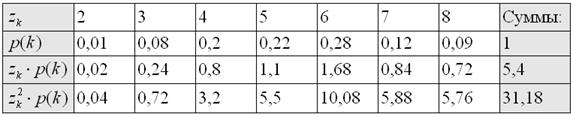
Сумме https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image150.gif соответствуют пары https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image152.gif и вероятность:  
https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image154.gif

Сумма https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image156.gif тоже возможна, и ей соответствуют 4 пары: https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image158.gif. Наверное, вы заметили, что вероятности выпадения всех пар уже подсчитана в первом пункте, и, возможно, на практике вам будет удобнее предварительно составить таблицу распределения вероятностей системы https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image010_0002.gif. Но, разумеется, можно обойтись и без неё:  
https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image160.gif

Сумме https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image162.gif соответствуют пары https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image164.gif и вероятность:  
https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image166.gif

Сумме https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image168.gif – пары https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image170.gif:  
https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image172.gif

и, наконец, сумме https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image174.gif – последняя возможная пара https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image176.gif:  
https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image178.gif.

Искомый закон распределения https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image082_0001.gif сведём в таблицу и сразу проведём стандартные вычисления для нахождения матожидания и дисперсии:   
  
**Обязательно контролируем**, что https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image182.gif, ну и дальнейшее просто:  
https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image184.gif  
https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image186.gif

**4)** Вычислим https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image088_0000.gif

Начнём с https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image189.gif. Как можно поступить? Можно составить закон распределения случайной величины  https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image191.gif. Паре https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image138_0000.gif соответствует значение https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image193.gif, паре https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image195.gif – значение https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image197.gif, паре https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image199.gif – значение https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image201.gif и так далее…. И далее напрямую вычислить мат ожидание. Но есть путь короче.

**Для математического ожидания справедливы следующие свойства**:

https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image203.gif – математическое ожидание величины, которая принимает единственное значение https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image205.gif, равно этому значению. Логично

https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image207.gif – постоянный множитель можно вынести за знак мат ожидания.

https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image209.gif – это свойство справедливо как для независимых, так и для зависимых случайных величин. И сразу убедимся в справедливости этого факта. В первом пункте мы вычислили https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image211.gif, во втором – https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image213.gif:  
https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image215.gif, что и требовалось проверить.

Таким образом:  
https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image217.gif

Но, следует отметить, что вам может быть предложено и «драконовское» задание, а именно, **доказать**, что https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image219.gif. При такой формулировке таки придётся составить закон распределения случайной величины https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image191_0000.gif и вычислить https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image189_0000.gif непосредственно.

Едем дальше. С нахождением https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image223.gif никаких проблем: в первом пункте мы уже вычислили https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image225.gif и по свойствам мат ожидания:  
https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image227.gif

Энтузиасты могут составить случайную величину https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image229.gif, и убедиться в справедливости равенства https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image231.gif.

И осталось вычислить https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image233.gif.

**Для дисперсии справедливы следующие свойства**:

https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image235.gif – дисперсия постоянной величины равна нулю.

https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image237.gif – константу можно вынести за знак дисперсии, возведя её в квадрат. Тоже логично: коль скоро, [**дисперсия – есть квадратичная величина**](https://mathprofi.net/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny.html), то при вынесении постоянного множителя, мы должны «расплатиться» возведением его в квадрат.

Для независимых случайных величин справедливо:  
https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image239.gif, и сразу проверяем: в пункте 1 мы нашли https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image241.gif, и в пункте 2 вычислили: https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image243.gif.

**Внимание!** Для [**зависимых величин**](https://mathprofi.net/zavisimye_i_nezavisimye_sluchainye_velichiny.html) данное равенство неверно! Но об этом в другой раз.

И из последних двух свойств следует парадоксальное на первый взгляд равенство:  
https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image245.gif, и тут прямо какой-то закон философии получился – когда из хаоса мы пытаемся вычесть другой хаос, то меры этих хаосов только суммируются.

И настал торжественный момент заключительных вычислений нашей большой задачи:  
https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image247.gif

Готово.

Но готовы ли вы? :) Небольшая задачка для самостоятельного решения:

Пример 3

Две независимые дискретные случайные величины https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image002_0010.gif и https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image006_0008.gif заданы своими законами распределения вероятностей:  
https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image249.jpg

Требуется:

1) Найти закон распределения вероятностей системы https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image010_0003.gif и вычислить https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image712.gif.

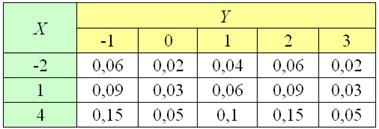
Вычисления, кстати, удобно проводить в Экселе – «забиваем» числа и не «забиваем» :)

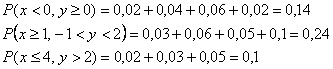
2) Найти закон распределения вероятностей случайной величины https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image252.gif, вычислить https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image254.gif и вероятность того, что полученная СВ примет отрицательное значение.

3) Проверить справедливость равенства https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image256.gif

В последнем пункте сформулировано ещё одно свойство математического ожидания, которое справедливо **только для независимых**случайных величин.

Краткое решение Примера 3:

1) Используя теоремы умножения вероятностей независимых и сложения несовместных событий, составим закон распределения системы *https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image010_0004.gif*:  
**  
Суммируя вероятности по строкам, убеждаемся, что получается закон распределения случайной величины *https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image002_0011.gif*, и, суммируя вероятности по столбцам, получаем в точности закон распределения *https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image006_0009.gif*.

Вычислим требуемые вероятности:  


2) Найдём закон распределения случайной величины *https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image252_0000.gif*.

Начнём с наименьшего значения *https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image263.gif*, которое даёт пара *https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image265.gif*. Вероятности появления всех возможных комбинаций уже вычислены в предыдущем пункте:  
*https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image267.gif*

Произведению *https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image269.gif* соответствуют пары *https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image271.gif*. По теореме сложения несовместных событий:  
*https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image273.gif*

Произведению *https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image275.gif* соответствует пара *https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image277.gif*:  
*https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image279.gif*

Произведению *https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image281.gif* – пара *https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image283.gif*:  
*https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image285.gif*

Произведению *https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image287.gif* соответствуют пары *https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image289.gif*:  
*https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image291.gif*

Произведению *https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image293.gif* – пара *https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image295.gif*:  
*https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image297.gif*

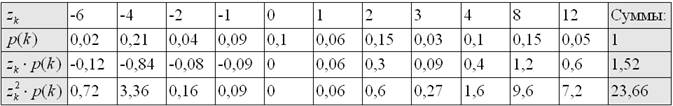
Произведению *https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image299.gif* – пары *https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image301.gif*:  
*https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image303.gif*

Произведению *https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image305.gif* – пара *https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image307.gif*:  
*https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image309.gif*

Произведению *https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image311.gif* – пара *https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image313.gif*:  
*https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image315.gif*

Произведению *https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image317.gif* – пара *https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image319.gif*:  
*https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image321.gif*

и, наконец, произведению *https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image323.gif* – пара *https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image325.gif*:  
*https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image327.gif*

Закон распределения случайной величины *https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image329.gif* сведём в 2 верхние строки расчётной таблицы, не забывая проконтролировать, что *https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image182_0000.gif*:  
**

Математическое ожидание: *https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image333.gif*, дисперсия:  
*https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image335.gif*

*https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image714.gif* – вероятность того, что случайная величина https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image715.gif примет отрицательное значение.

3) Покажем справедливость равенства *https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image337.gif*.

*https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image339.gif* – вычислено в предыдущем пункте.

Вычислим матожидания исходных случайных величин:  
*https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image341.gif*

Таким образом:  
*https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image343.gif*  
*https://mathprofi.net/s/sistema_sluchainyh_velichin_clip_image345.gif* – получено верное равенство, что и требовалось проверить.