**ЛЕКЦИОННОЕ ЗАНЯТИЕ**

**Тема: «Дискретные случайные величины»**

***Случайной*** называют *величину*, которая в результате испытания примет **одно и только одно** числовое значение, зависящее от случайных факторов и заранее непредсказуемое.

Случайные величины, как правило, **обозначают** через  , а их значения – соответствующими маленькими буквами с подстрочными индексами, например, .

*Иногда используют , а также греческие буквы*

Пример встретился нам на [**первом же уроке по теории вероятностей**](http://www.mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html), где мы фактически рассмотрели следующую случайную величину:

 – количество очков, которое выпадет после броска игрального кубика.

В результате данного испытания выпадет **одна и только** грань, какая именно – не предсказать *(фокусы не рассматриваем)*; при этом случайная величина  может принять одно из следующий значений:

.

Пример из статьи о [**Статистическом определении вероятности**](http://www.mathprofi.ru/statisticheskoe_opredelenie_verojatnosti.html):

 – количество мальчиков среди 10 новорождённых.

Совершенно понятно, что это количество заранее не известно, и в очередном десятке родившихся детей может оказаться:

, либо  мальчиков – **один и только один** из перечисленных вариантов.

И, дабы соблюсти форму, немного физкультуры:

 –  дальность прыжка в длину *(в некоторых единицах)*.

Её не в состоянии предугадать даже мастер спорта :)

Тем не менее, ваши гипотезы?

Коль скоро речь идёт о [**множестве действительных чисел**](http://www.mathprofi.ru/mnozhestva.html), то случайная величина может принять *несчётно много* значений из некоторого числового промежутка. И в этом состоит её принципиальное отличие от предыдущих примеров.

Таким образом, **случайные величины целесообразно разделить на 2 большие группы**:

1. Дискретная *(прерывная)* случайная величина – принимает отдельно взятые, изолированные значения. Количество этих значений *конечно* либо *бесконечно, но счётно.*

…нарисовались непонятные термины? Срочно повторяем [**основы алгебры**](http://www.mathprofi.ru/mnozhestva.html)!

2) Непрерывная случайная величина – принимает **все** числовые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

***Примечание****: в учебной литературе популярны аббревиатуры ДСВ и НСВ*

Сначала разберём дискретную случайную величину, затем – [**непрерывную**](http://www.mathprofi.ru/nepreryvnaya_sluchaynaya_velichina.html).

Поехали:

**Закон распределения дискретной случайной величины**

– это*соответствие* между возможными значениями этой величины и их вероятностями. Чаще всего закон записывают таблицей:

Довольно часто встречается термин ***ряд****распределения*, но в некоторых ситуациях он звучит двусмысленно, и поэтому я буду придерживаться «закона».

А теперь **очень важный момент**: поскольку случайная величина  *обязательно* примет **одно из значений** , то соответствующие события образуют [**полную группу**](http://www.mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html) и сумма вероятностей их наступления равна единице:


или, если записать свёрнуто:


Так, например, закон распределения вероятностей выпавших на кубике очков имеет следующий вид:


Без комментариев.

Возможно, у вас сложилось впечатление, что дискретная случайная величина может принимать только «хорошие» целые значения. Развеем иллюзию – они могут быть любыми:

Пример 1

Некоторая игра имеет следующий закон распределения выигрыша:


Найти 

…наверное, вы давно мечтали о таких задачах :) Открою секрет – я тоже. В особенности после того, как завершил работу над [**теорией поля**](http://www.mathprofi.ru/teoriya_polya.html).

**Решение**: так как случайная величина  может принять только одно из трёх значений, то соответствующие события образуют *полную группу*, а значит, сумма их вероятностей равна единице:


Разоблачаем «партизана»:

 – таким образом, вероятность выигрыша  условных единиц составляет 0,4.

Контроль: , в чём и требовалось убедиться.

**Ответ**: 

Не редкость, когда закон распределения требуется составить самостоятельно. Для этого используют [**классическое определение вероятности**](http://www.mathprofi.ru/zadachi_na_klassicheskoe_opredelenie_verojatnosti_primery_reshenij.html), [**теоремы умножения / сложения вероятностей событий**](http://www.mathprofi.ru/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html) и другие фишки **[тервера](http://www.mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html)**:

Пример 2

В коробке находятся 50 лотерейных билетов, среди которых 12 выигрышных, причём 2 из них выигрывают по 1000 рублей, а остальные – по 100 рублей. Составить закон распределения случайной величины  – размера выигрыша, если из коробки наугад извлекается один билет.

**Решение**: как вы заметили, значения случайной величины принято располагать в порядке их возрастания. Поэтому мы начинаем с самого маленького выигрыша, и именно  рублей.

Всего таковых билетов 50 – 12 = 38, и по [**классическому определению**](http://www.mathprofi.ru/zadachi_na_klassicheskoe_opredelenie_verojatnosti_primery_reshenij.html):
 – вероятность того, что наудачу извлечённый билет окажется безвыигрышным.

С остальными случаями всё просто. Вероятность выигрыша  рублей составляет:


И для :


Проверка:  – и это особенно приятный момент таких заданий!

**Ответ**: искомый закон распределения выигрыша:


Следующее задание для самостоятельного решения:

Пример 3

Вероятность того, что стрелок поразит мишень, равна . Составить закон распределения случайной величины  – количества попаданий после 2 выстрелов.

…я знал, что вы по нему соскучились :) Вспоминаем [**теоремы умножения и сложения**](http://www.mathprofi.ru/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html). Решение и ответ в конце урока.

Закон распределения полностью описывает случайную величину, однако на практике бывает полезно (а иногда и полезнее) знать лишь некоторые её ***числовые характеристики***.

**Математическое ожидание дискретной случайной величины**

Говоря простым языком, это *среднеожидаемое значение* при многократном повторении испытаний. Пусть случайная величина  принимает значения  с вероятностями  соответственно. Тогда математическое ожидание  данной случайной величины равно *сумме произведений* всех её значений на соответствующие вероятности:



или в свёрнутом виде:


Вычислим, например, математическое ожидание случайной величины  – количества выпавших на игральном кубике очков:

 очка

В чём состоит вероятностный смысл полученного результата? Если подбросить кубик достаточно много раз, то *среднее значение* выпавших очков будет близкО к 3,5 – и чем больше провести испытаний, тем ближе. Собственно, об этом эффекте я уже подробно рассказывал на уроке о [**статистической вероятности**](http://www.mathprofi.ru/statisticheskoe_opredelenie_verojatnosti.html).

Теперь вспомним нашу гипотетическую игру:


Возникает вопрос: а выгодно ли вообще играть в эту игру? …у кого какие впечатления? Так ведь «навскидку» и не скажешь! Но на этот вопрос можно легко ответить, вычислив математическое ожидание, по сути – *средневзвешенный* по вероятностям выигрыш:

, таким образом, математическое ожидание данной игры **проигрышно**.

Не верь впечатлениям – верь цифрам!

Да, здесь можно выиграть 10 и даже 20-30 раз подряд, но на длинной дистанции нас ждёт неминуемое разорение. И я бы не советовал вам играть в такие игры :) Ну, может, только [**ради развлечения**](http://www.mathprofi.ru/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli.html).

Из всего вышесказанного следует, что математическое ожидание – это уже НЕ СЛУЧАЙНАЯ величина.

Творческое задание для самостоятельного исследования:

Пример 4

Мистер Х играет в европейскую рулетку по следующей системе: постоянно ставит 100 рублей на «красное». Составить закон распределения случайной величины  – его выигрыша. Вычислить математическое ожидание выигрыша и округлить его до копеек. Сколько *в среднем*

проигрывает игрок с каждой поставленной сотни?

***Справка****: европейская рулетка содержит 18 красных, 18 чёрных и 1 зелёный сектор («зеро»). В случае выпадения «красного» игроку выплачивается удвоенная ставка, в противном случае она уходит в доход казино*

Существует много других систем игры в рулетку, для которых можно составить свои таблицы вероятностей. Но это тот случай, когда нам не нужны никакие законы распределения и таблицы, ибо доподлинно установлено, что математическое ожидание игрока будет точно таким же. От системы к системе меняется лишь [**дисперсия**](http://www.mathprofi.ru/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny.html), о которой мы узнаем во 2-й части урока.

Но прежде будет полезно размять пальцы на клавишах калькулятора:

Пример 5

Случайная величина  задана своим законом распределения вероятностей:


Найти , если известно, что . Выполнить проверку.

Есть?

Тогда переходим к изучению [**дисперсии дискретной случайной величины**](http://www.mathprofi.ru/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny.html), и по возможности, **ПРЯМО СЕЙЧАС!!** – чтобы не потерять нить темы.

Решения и ответы:

*Пример 3.****Решение****: по условию  – вероятность попадания в мишень. Тогда:*
* – вероятность промаха.*

*Составим  – закон распределения попаданий при двух выстрелах:*

* – ни одного попадания. По*[***теореме умножения вероятностей независимых событий***](http://www.mathprofi.ru/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html)*:*
**

* – одно попадание. По*[***теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения независимых событий***](http://www.mathprofi.ru/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html)*:*
**

* – два попадания. По теореме умножения вероятностей независимых событий:*
**

*Проверка: 0,09 + 0,42 + 0,49 = 1*

***Ответ****: *

***Примечание****: можно было использовать обозначения  – это не принципиально.*

*Пример 4.****Решение****: игрок выигрывает 100 рублей в 18 случаях из 37, и поэтому закон распределения его выигрыша имеет следующий вид:*
**
*Вычислим математическое ожидание:*
**
*Таким образом, с каждой поставленной сотни игрок в среднем проигрывает 2,7 рубля.*

*Пример 5.****Решение****: по определению математического ожидания:*
**
*поменяем части местами и проведём упрощения:*
**
*таким образом:*
**

*Выполним проверку:*
**
*, что и требовалось проверить.*

***Ответ****: *

**Система случайных величин. Задачи с решениями**

Одна [**случайная величина**](https://mathprofi.net/sluchainaya_velichina.html)– хорошо, а две – лучше, а ещё лучше – их **система**, которую также называют **двумерной случайной величиной**. Кроме того, можно рассмотреть системы трёх и большего количества величин, но это уже будет слишком хорошо, а оно, как известно, плохо :)  Продолжаем разговор о случайных величинах (СВ), и для тех, кто не в теме, я сразу привёл ссылку выше.

Вспоминаем  пример с игральным кубиком (костью), где мы рассмотрели случайную величину  – количество очков, выпавших в результате его броска. В правильных руках правильный кубик даёт следующий [**закон распределения вероятностей**](https://mathprofi.net/sluchainaya_velichina.html):


Теперь рассмотрим другой такой же кубик и случайную величину  – количество очков, выпавших на этом кубике. Очевидно, что вероятности выпадения его граней будут точно такими же:


Что мы имеем? **Две случайные величины**. Но это пока что не система, как, например, не являются системой отдельно взятые **[диффуры](https://mathprofi.net/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii.html)**. О системе речь заходит, когда мы рассматриваем эти величины ВМЕСТЕ, например, при подбрасывании костей в игре.

Построим **закон распределения вероятностей системы**. Так как результат броска одного кубика **никак не влияет** на количество очков, выпавших на другом кубике, то случайные величины  являются **независимыми**.

По [**теореме умножения вероятностей независимых событий**](https://mathprofi.net/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html), вероятность выпадения любой возможной комбинации очков постоянна и равна . Закон распределения вероятностей можно записать аналитически:

 – вероятность выпадения любой пары , где случайные величины могут принять одно из следующих значений: , .

Но в произвольной задаче вероятности чаще бывают разными, и поэтому на практике широко распространена табличная запись системы. Тот случай, когда копипаст не просто полезен, а очень полезен:

Устройство таблицы очевидно, но на всякий случай я обвёл красным один пример: вероятность того, что случайная величина  примет значение 2 и случайная величина  значение 4 записывается в ячейку, расположенную на пересечении 2-й строки и 4-го столбца.

Обратите внимание, что **сумма всех вероятностей равна единице**, это означает, что в таблице учтены все возможные исходы ([**полная группа**](https://mathprofi.net/teorija_verojatnostei.html)), и в результате броска двух кубиков достоверно появится одна из 36 пар.

Помимо [**дискретных**](https://mathprofi.net/sluchainaya_velichina.html), систему могут образовывать и [**непрерывные случайные величины**](https://mathprofi.net/nepreryvnaya_sluchaynaya_velichina.html). За примером далеко ходить не будем: предположим, что мы бросаем игральный кубик в некую цель, например, в коробку. Тогда уместно рассмотреть следующую **двумерную случайную величину**: , где  – случайное отклонение от цели «по горизонтали» (влево/вправо) и  – случайное отклонение от цели в длину (ближе/дальше).

Кстати, есть ли отличие между понятиями «система двух случайных величин» и «двумерная случайная величина»? – в различных источниках информации используют и тот, и другой термин. С моей точки зрения, отличие есть. **Двумерная** или **большемерная случайная величина**, как правило, порождается в результате конкретного испытания, зачастую (но не обязательно) с одним объектом, пожалуйста – тот же бросок кубика в цель. Понятие же **системы** более формально: один кубик может подбрасывать бабушка на кухне, а другой дедушка в коридоре, или даже ничего не подбрасывать, а совершать прыжки в длину. Но математика-то не запрещает рассмотреть соответствующие СВ единой системой! А психиатрия вообще приветствует.

Пример 1

Независимые случайные величины  принимают только целые значения:

 – от 1 до 13 с равными вероятностями;
 – от 1 до 16 с равными вероятностями.

Найти  – вероятность того, что в очередном испытании сумма появившихся чисел будет меньше шести.

**Решение**:предложенные случайные величины можно ассоциировать с нестандартными игральными костями, на одной из которых 13, а на другой – 16 граней.

Из условия следует, что:
– вероятность того, что случайная величина  примет какое-либо значение равна  ;
– вероятность того, что случайная величина  примет какое-либо значение равна  .

Так как случайные величины независимы, то по [**теореме умножения вероятностей независимых событий**](https://mathprofi.net/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html), вероятность появления любой пары чисел  в очередном испытании постоянна и равна: . Заметьте, что рассмотрение пар **уже**констатирует тот факт, что мы рассматриваем СИСТЕМУ случайных величин, а не их по отдельности.

Подсчитаем количество пар, соответствующих событию :

сумме  соответствует единственная пара ;

сумме  – пары ;

сумме   – пары 

и сумме : .

**Итого**: 10 нужных пар.

По [**теореме сложения вероятностей несовместных событий**](https://mathprofi.net/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html):
 – вероятность того, что сумма появившихся чисел будет меньше шести

**Ответ**: 

Но то, конечно, была разминка:

Пример 2

Две независимые дискретные случайные величины  и  заданы своими законами распределения вероятностей:


Нет, это не опечатка, случайные величины имеют одинаковые законы распределения. Здесь их удобно ассоциировать с двумя одинаковыми и независимо работающими палатами игровыми автоматами, на которых с определенными вероятностями загораются пронумерованные лампочки.

Требуется:

1) Найти закон распределения вероятностей системы случайных величин и вычислить:
 – [**математическое ожидание**](https://mathprofi.net/sluchainaya_velichina.html) случайной величины , при условии, что другая величина приняла значение ;
 – математическое ожидание случайной величины , при условии .

2) Вычислить  – вероятности того, что случайная величина  примет значение из соответствующих двумерных областей.

3) Найти закон распределения вероятностей случайной величины . Вычислить математическое ожидание  и дисперсию .

4) Вычислить 

В реальной работе вам может встретиться и то, и другое, и третье и четвёртое, поэтому разбираемся во всём осознанно и очень внимательно.

**Решение**:

**1)** Составим закон распределения вероятностей системы  случайных величин.

 «Исковые» вероятности будем обозначать как обычно:
,
а к «игровым» вероятностям добавим «птичку»:


Вычисления стандартно начнём с наименьшего «икса» и «игрека». Найдём  – вероятность того, что случайная величина  примет значение  [**и**](https://mathprofi.net/teorija_verojatnostei.html) случайная величина  значение . По условию, случайные величины независимы, и коль скоро так, то по [**теореме умножения вероятностей независимых событий**](https://mathprofi.net/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html):


Найдём  – вероятность того, что :


И так далее. Вычисления удобно проводить на калькуляторе или даже устно, а результаты заносить в таблицу. В качестве ещё одного примера я вычислил и отметил красным цветом вероятность  – того, что случайные величины примут значения :

Это и есть закон распределения системы . Не забываем проверить, что сумма всех вероятностей равна единице. Кстати, это ещё не значит, что ошибок нет. Для большей уверенности следует просуммировать вероятности по строкам – в результате должны получиться , т.е. закон распределения случайной величины ; и просуммировать вероятности по столбцам – в результате должны получиться «игровые» вероятности  величины .

Для системы СВ не вводится понятия «общего» [**математического ожидания**](https://mathprofi.net/sluchainaya_velichina.html), однако можно подсчитать мат ожидания **условные** – при условии, что одна из величин примет или уже приняла некоторое конкретное значение.

Вычислим  – математическое ожидание случайной величины , **при условии**, что другая величина приняла значение . Так как случайные величины независимы, то распределение случайной величины  **не зависит** от того, какое значение приняла случайная величина . А значит, при любом возможном значении «игрек» условные математические ожидания:
 – в точности равны мат ожиданию самой случайной величины .

Логично? Представьте, что на 2-м игровом автомате зажглась лампочка (любая). Ну и что с того? Первый же автомат работает независимо!

Следует отметить, что с [**зависимыми величинами**](https://mathprofi.net/zavisimye_i_nezavisimye_sluchainye_velichiny.html) всё не так, и на следующем уроке мы разберём алгоритм вычисления условного мат ожидания, который формально пригоден и для независимых величин.

Ну а пока нам достаточно найти [**математическое ожидание**](https://mathprofi.net/sluchainaya_velichina.html), и заодно сразу вычислим [**дисперсию**](https://mathprofi.net/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny.html), потребуется позже:

Таким образом:



С вероятностью  аналогично – представьте, что на «исковом» игровом автомате зажглась лампочка №4. Ну и что? Это никак не повлияло на «игровой» автомат и его мат ожидание, поэтому:
 – даже считать не пришлось, т.к. наши случайные величины имеют одинаковые распределения вероятностей.

**2)** Вычислим вероятность  – того, что случайная величина  примет значение из области, которую задают неравенства в скобках.

По [**аналогии с одномерным случаем**](https://mathprofi.net/funkcia_raspredeleniya_dsv.html), это можно сделать с помощью функции распределения вероятностей. Но для двумерной СВ [**составить такую функцию**](https://mathprofi.net/dvumernaya_nepreryvnaya_sluchaynaya_velichina.html) – не то, чтобы сложное, но весьма кропотливое занятие, и поэтому здесь проще просуммировать вероятности, соответствующие условиям . На рисунке ниже я обвёл их красным цветом, и обратите внимание, что в силу строгости неравенства , строку  не следует включать в эту область. Таким образом:  – вероятности я привык суммировать по строкам слева направо.

Аналогично, область   отграничена синим цветом, и здесь не следует учитывать значение . В результате:  – вероятность того, что компонента  примет значения, не превосходящее двух, **и** компонента  – значение, меньшее двух.

И с вероятностью  всё просто. Поскольку на переменную «икс» не наложено никаких ограничений, то она может быть любой, но вот то, что «игрек» окажется больше четырёх – есть событие невозможное. Поэтому .

Точно по такому же принципу вычисляются вероятности и зависимости случайных величин , . Тут разницы нет.

**3**) Найдем закон распределения вероятностей случайной величины .

**Принципиальным отличием от предыдущих пунктов** является то, что здесь речь идёт об одномерной случайной величине. Как получаются её значения? С помощью суммирования случайных значений , которые могут принять величины . И нам нужно перебрать все возможные варианты.

Начать удобно с самой маленькой возможной суммы, её образует пара , в результате чего случайная величина «зет» примет значение  с вероятностью:


Может ли сумма равняться трём? Может. Исходу  соответствуют пары . По [**теоремам умножения вероятностей независимых**](https://mathprofi.net/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html) и [**сложения несовместных событий**](https://mathprofi.net/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html):


Сумме  соответствуют пары  и вероятность:


Сумма  тоже возможна, и ей соответствуют 4 пары: . Наверное, вы заметили, что вероятности выпадения всех пар уже подсчитана в первом пункте, и, возможно, на практике вам будет удобнее предварительно составить таблицу распределения вероятностей системы . Но, разумеется, можно обойтись и без неё:


Сумме  соответствуют пары  и вероятность:


Сумме  – пары :


и, наконец, сумме  – последняя возможная пара :
.

Искомый закон распределения  сведём в таблицу и сразу проведём стандартные вычисления для нахождения матожидания и дисперсии:

**Обязательно контролируем**, что , ну и дальнейшее просто:



**4)** Вычислим 

Начнём с . Как можно поступить? Можно составить закон распределения случайной величины  . Паре  соответствует значение , паре  – значение , паре  – значение  и так далее…. И далее напрямую вычислить мат ожидание. Но есть путь короче.

**Для математического ожидания справедливы следующие свойства**:

 – математическое ожидание величины, которая принимает единственное значение , равно этому значению. Логично

 – постоянный множитель можно вынести за знак мат ожидания.

 – это свойство справедливо как для независимых, так и для зависимых случайных величин. И сразу убедимся в справедливости этого факта. В первом пункте мы вычислили , во втором – :
, что и требовалось проверить.

Таким образом:


Но, следует отметить, что вам может быть предложено и «драконовское» задание, а именно, **доказать**, что . При такой формулировке таки придётся составить закон распределения случайной величины  и вычислить  непосредственно.

Едем дальше. С нахождением  никаких проблем: в первом пункте мы уже вычислили  и по свойствам мат ожидания:


Энтузиасты могут составить случайную величину , и убедиться в справедливости равенства .

И осталось вычислить .

**Для дисперсии справедливы следующие свойства**:

 – дисперсия постоянной величины равна нулю.

 – константу можно вынести за знак дисперсии, возведя её в квадрат. Тоже логично: коль скоро, [**дисперсия – есть квадратичная величина**](https://mathprofi.net/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny.html), то при вынесении постоянного множителя, мы должны «расплатиться» возведением его в квадрат.

Для независимых случайных величин справедливо:
, и сразу проверяем: в пункте 1 мы нашли , и в пункте 2 вычислили: .

**Внимание!** Для [**зависимых величин**](https://mathprofi.net/zavisimye_i_nezavisimye_sluchainye_velichiny.html) данное равенство неверно! Но об этом в другой раз.

И из последних двух свойств следует парадоксальное на первый взгляд равенство:
, и тут прямо какой-то закон философии получился – когда из хаоса мы пытаемся вычесть другой хаос, то меры этих хаосов только суммируются.

И настал торжественный момент заключительных вычислений нашей большой задачи:


Готово.

Но готовы ли вы? :) Небольшая задачка для самостоятельного решения:

Пример 3

Две независимые дискретные случайные величины  и  заданы своими законами распределения вероятностей:


Требуется:

1) Найти закон распределения вероятностей системы  и вычислить .

Вычисления, кстати, удобно проводить в Экселе – «забиваем» числа и не «забиваем» :)

2) Найти закон распределения вероятностей случайной величины , вычислить  и вероятность того, что полученная СВ примет отрицательное значение.

3) Проверить справедливость равенства 

В последнем пункте сформулировано ещё одно свойство математического ожидания, которое справедливо **только для независимых**случайных величин.

Краткое решение Примера 3:

1) Используя теоремы умножения вероятностей независимых и сложения несовместных событий, составим закон распределения системы **:
**
Суммируя вероятности по строкам, убеждаемся, что получается закон распределения случайной величины **, и, суммируя вероятности по столбцам, получаем в точности закон распределения **.

Вычислим требуемые вероятности:


2) Найдём закон распределения случайной величины **.

Начнём с наименьшего значения **, которое даёт пара **. Вероятности появления всех возможных комбинаций уже вычислены в предыдущем пункте:
**

Произведению ** соответствуют пары **. По теореме сложения несовместных событий:
**

Произведению ** соответствует пара **:
**

Произведению ** – пара **:
**

Произведению ** соответствуют пары **:
**

Произведению ** – пара **:
**

Произведению ** – пары **:
**

Произведению ** – пара **:
**

Произведению ** – пара **:
**

Произведению ** – пара **:
**

и, наконец, произведению ** – пара **:
**

Закон распределения случайной величины ** сведём в 2 верхние строки расчётной таблицы, не забывая проконтролировать, что **:
**

Математическое ожидание: **, дисперсия:
**

** – вероятность того, что случайная величина  примет отрицательное значение.

3) Покажем справедливость равенства **.

** – вычислено в предыдущем пункте.

Вычислим матожидания исходных случайных величин:
**

Таким образом:
**
** – получено верное равенство, что и требовалось проверить.