**ЛЕКЦИОННОЕ ЗАНЯТИЕ**

**Тема: «Непрерывные случайные величины. Геометрическая вероятность»**

*Непрерывной случайной величиной* называют случайную величину, значения которой сплошь заполняют некоторый интервал.

Например, рост человека ‒ непрерывная случайная величина.

Функцией распределения случайной величины называют вероятность того, что случайная величина *Х* принимает значения, меньшие *х*.

***F* (*x*) = *P* ( *X***

Геометрически, формула *F*(*x*) = *P* (*X*означает, что все значения *Х* будут находиться, левее *х*. Функция *F*(*x*) называется интегральной функцией.

*Плотностью вероятности* непрерывной случайной величины *f* (*x*) называется производная от функции распределения этой случайной величины:

Следовательно, F(*x*) первообразная для *f* (*x*).

**Теорема.** Вероятность попадания непрерывной случайной величины *X* в интервал от *a* до *b* находится по формуле:

**Доказательство.**

**Следствие.** Если все возможные значения случайной величины

# Непрерывные случайные величины. Функция распределения непрерывной случайной величины и ее свойства.

Случайная величина называется ***непрерывной***, если множество ее возможных значений представляет собой некоторый конечный или бесконечный промежуток числовой оси. Например, температура больного в фиксированное время суток, масса наугад выбранной таблетки некоторого препарата, рост наугад выбранного студента и т.д.

Одним из возможных способов задания непрерывной случайной величины является использование с этой целью соотв. ***функции распределения***. Функция F(x), равная вероятности того, что случайная величина Х в результате испытания примет значение, меньше х, называется **функцией распределения данной случайной величины: F(x)=P(X<x)**

**Свойства функции распределения**:

1) Функция распределения удовлетворяет неравенству: 0≤ F(x) ≤1 ;

 2) Функция распределения является неубывающей функцией, т.е. из х2>х1следует F(x2)≥F(x1). 3)Функция распределения стремится к 0 при неограниченном убывании аргумента и стремится к 1 при его неограниченном возрастании.

График функции распределения

## **Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины и ее свойства. Основные числовые характеристики непрерывной случайной величины.**

**Плотностью распределения вероятностей** (плотностью вероятности) f(x) непрерывной случайной величины Х называется производная функции распределения F(x) этой величины: f(x)=F’(x)

***Свойства плотности распределения вероятностей:*** **1)** Плотность вероятности является неотрицательной функцией: f(x)≥0; **2)** Вероятность того, что в результате испытания непрерывная случайная величина примет какие либо значения из интервала (a,b) равна:

 

**3)** Определенный интеграл в пределах от –бесконечности до + бесконечности от плотности вероятности непрерывной случайной величины равен единице :****

**4)** Определенный интеграл в пределах от минус бесконечности до х от плотности вероятности непрерывной случайной величины равен функции распределения этой величины: 

Под основными числовыми характеристиками непрерывной случайной величины понимают, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины: 

Дисперсия непрерывной случайной величины **D(X) = M[X – M(X)]2. (добавить)**

Среднее квадратическое отклонение: σ(х)= √D(X)

## **Нормальный закон распределения. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал. Правило трех сигм.**

Из всех видов распределения непрерывных случайных величин наиболее часто используют ***нормальное распределение***, которое задается ***законом Гаусса.***Так, если мы имеем сумму большого числа независимых величин, подчиненных каким угодно законам распределения, то при некоторых общих условиях она будет приближенно подчиняться нормальному закону. Непрерывная случайная величина *называется распределенной по нормальному закону,*если ее плотность вероятности имеет вид : (увеличить, дописать), где М-математическое ожидание, σ в квадрате – дисперсия, σ-среднее квадратическое отклонение этой величины. Это кривая Гаусса:



Подставив выражение для плотности вероятности нормально распределенной случайной величины в выражение , получим вероятность того, что в результате испытания нормально распределенная случайная величина

примет значение из заданного интервала  **P(a<X<b)**=

***Правило трех сигм***: *отклонения значений нормального распределения случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине практически не превышает ее утроенного среднего квадратического отклонения.*

**Непрерывной случайной величиной** называется случайная величина Х, если ее функция распределения (интегральная функция распределения) представима в виде:

|  |
| --- |
| формула |

где *f*(*x*) – некоторая неотрицательная функция, такая что

|  |
| --- |
| формула |

Функция *f*(*x*) называется **плотностью распределения вероятностей случайной величины** X (дифференциальной функцией распределения).

**Вероятность** того, что непрерывная случайная величина X принимает значение в заданном промежутке, вычисляется следующим образом:

|  |
| --- |
| формула |

Примеры распределений вероятностей непрерывной случайной величины Х:

* [***равномерное распределение***](http://www.ekonomika-st.ru/drugie/metodi/t-ver-1-7.html) вероятностей непрерывной случайной величины;
* [***показательное распределение***](http://www.ekonomika-st.ru/drugie/metodi/t-ver-1-7.html) вероятностей непрерывной случайной величины;
* [***нормальное распределение***](http://www.ekonomika-st.ru/drugie/metodi/t-ver-1-8.html) вероятностей непрерывной случайной величины.

При решении задач широко используют числовые характеристики непрерывных случайных величин (таблица 1).

|  |
| --- |
| Таблица 1 - **Числовые характеристики непрерывных случайных величин** |
| **Числовая характеристика** | **Обозначение и формула** |
| **Математическое ожидание** непрерывной случайной величины Х | формула |
| Если все возможные значения Х принадлежат интервалу (а, b), то математическое ожидание вычисляют | формула |
| **Дисперсия** непрерывной случайной величины Х | формула |
| иначе | формула |
| Если все возможные значения Х принадлежат интервалу (а, b), то дисперсию вычисляют | формула |
| иначе | формула |
| **Среднее квадратическое отклонение** непрерывной случайной величины Х | формула |

## Пример решения задачи по теме «Непрерывные случайные величины»

**Задача.** Известна плотность вероятности случайной величины:

|  |
| --- |
| формула |

Найти: а) параметр а; б) функцию распределения F(x); в) вероятность попадания X в интервал (-π/4; π/4).
Построить графики f(x), F(x).

**Решение.** 1. Зная свойства плотности вероятности - функции f(х), найдем неизвестный параметр а. Из неравенства f(х)≥0, делаем вывод, что а≥0. Далее:

|  |
| --- |
| формула |

Вычислим данный интеграл. Зная, что его значение должно быть равно единице, выразим а.

|  |
| --- |
| формула |

= а-(-а)=2а. Зная, что

|  |
| --- |
| формула |

получаем 2а=1, отсюда а=1/2.

|  |
| --- |
| график |

График функции f(x) - плотности распределения вероятностей случайной величины представлен на рисунке 1.

2. Для нахождения функции F(x) используем формулу, определяющую интегральную функцию распределения. Так как f(x) задана различным образом на трех разных интервалах, то выражение для F(x) находим отдельно для каждого интервала.

|  |
| --- |
| формула |

если х ≤ 0

Если 0 < х ≤ π, то

|  |
| --- |
| формула |

= ½ (-cosx + cos0) = ½ (1-cosx)

Если х > π, то

|  |
| --- |
| формула |

Искомая интегральная функция принимает окончательный вид:

|  |
| --- |
| формула |

График функции F(x) представлен на рисунке 2.

|  |
| --- |
| график |

3. Вероятность попадания случайной величины Х в интервал (-π/4; π/4) найдем по формуле: **P(a<x<b)=F(b)-F(a)**.
P(-π/4 < x < π/4) = F(π/4) - F(-π/4) = ½ (1-cos π/4) – 0 = ½ (1-½√2).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Функцией распределения* случайной величины *Х* называется функция *F*(*Х*), выражающая для каждого *Х* вероятность того, что случайная величина *Х* примет значение, меньшее *Х*: http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image912.gif.Функцию F(х) иногда называют интегральной функцией распределения, или интегральным законом распределения.Случайная величина *Х* называется *Непрерывной*, если ее функция распределения непрерывна в любой точке и дифференцируема всюду, кроме, быть может, отдельных точек.*Примеры* непрерывных случайных величин: диаметр детали, которую токарь обтачивает до заданного размера, рост человека, дальность полета снаряда и др.**Теорема.** Вероятность любого отдельно взятого значения непрерывной случайной величины равна нулюhttp://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image913.gif.**Следствие.** Если *Х* — непрерывная случайная величина, то вероятность попадания случайной величины в интервал http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image914.gif не зависит от того, является этот интервал открытым или закрытым, т. е.http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image915.gif.Если непрерывная случайная величина Х может принимать только значения в границах от *А* до *B*(где *А* и *B* — некоторые постоянные), то функция распределения ее равна нулю для всех значений http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image916.gif и единице для значений http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image917.gif.Для непрерывной случайной величиныhttp://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image918.gif.Все свойства функций распределения дискретных случайных величин выполняются и для функций распределения непрерывных случайных величин.Задание непрерывной случайной величины с помощью функции распределения не является единственным.*Плотностью вероятности* (*Плотностью распределения* или *Плотностью*) *Р*(*Х*) непрерывной случайной величины *Х* называется производная ее функции распределенияhttp://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image919.gif.Плотность вероятности *Р*(*Х*), как и функция распределения *F*(*Х*), является одной из форм закона распределения, но в отличие от функции распределения она существует только для *Непрерывных* случайных величин.Плотность вероятности иногда называют дифференциальной функцией, или дифференциальным законом распределения.График плотности вероятности называется кривой распределения.*Свойства* плотности вероятности непрерывной случайной величины:http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image920.gif.http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image921.gif (рис. 8.1).

|  |
| --- |
|  |
| http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image922.gif |

Рис. 8.1http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image923.gif (рис. 8.2).

|  |
| --- |
|  |
| http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image924.gif |

Рис. 8.24. http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image925.gif.Геометрически свойства плотности вероятности означают, что ее график — кривая распределения — лежит не ниже оси абсцисс, и полная площадь фигуры, ограниченной кривой распределения и осью абсцисс, равна единице.**Пример 8.1.** Минутная стрелка электрических часов передвигается скачками поминутно. Вы бросили взгляд на часы. Они показывают *А* минут. Тогда для вас истинное время в данный момент будет случайной величиной. Найти ее функцию распределения.[**Решение**](http://matica.org.ua/sdelat-zakaz)**.** Очевидно, что функция распределения истинного времени равна 0 для всех http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image916.gif и единице для http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image926.gif. Время течет равномерно. Поэтому вероятность того, что истинное время меньше *А*+ 0,5 мин, равна 0,5, так как одинаково вероятно, прошло ли после *А* менее или более полминуты. Вероятность того, что истинное время меньше *А* + 0,25 мин, равна 0,25 (вероятность этого времени втрое меньше вероятности того, что истинное время больше *А* + 0,25 мин, а сумма их равна единице, как сумма вероятностей противоположных событий). Аналогично рассуждая, найдем, что вероятность того, что истинное время меньше *А* + 0,6 мин, равна 0,6. В общем случае вероятность того, что истинное время меньше *А* + + *α* мин http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image927.gif, равна *α*. Следовательно, функция распределения истинного времени имеет следующее выражение:http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image928.gif

|  |
| --- |
|  |
| http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image929.gif |

Она непрерывна всюду, а производная ее непрерывна во всех точках, за исключением двух: *Х = а* и *Х = а* + 1. График этой функции имеет вид (рис. 8.3):Рис. 8.3**Пример 8.2.** Является ли функцией распределения некоторой случайной величины функция

|  |
| --- |
|  |
| http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image930.gif |

http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image931.gif[Решение](http://matica.org.ua/sdelat-zakaz).Рис. 8.4Все значения этой функции принадлежат отрезку http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image932.gif, т. е. http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image933.gif. Функция *F*(*Х*) является неубывающей: в промежутке http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image934.gif она постоянна, равна нулю, в промежутке http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image935.gif возрастает, в промежутке http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image936.gif также постоянна, равна единице (см. рис. 8.4). Функция непрерывна в каждой точке *Х*0 области ее определения — промежутка http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image937.gif, поэтому непрерывна слева, т. е. выполняется равенствоhttp://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image938.gifhttp://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image939.gif, http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image940.gif.Выполняются и равенства:http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image938.gifhttp://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image941.gif, http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image942.gif.Следовательно, функция http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image943.gif удовлетворяет всем свойствам, характерным для функции распределения. Значит данная функция http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image943.gif является функцией распределения некоторой случайной величины *Х*.**Пример 8.3.** Является ли функцией распределения некоторой случайной величины функцияhttp://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image944.gif**Решение.** Данная функция не является функцией распределения случайной величины, так как на промежутке http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image945.gif она убывает и не является непрерывной. График функции изображен на рис. 8.5.

|  |
| --- |
|  |
| http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image946.gif |

Рис. 8.5**Пример 8.4.** Случайная величина *Х* задана функцией распределенияhttp://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image947.gifНайти коэффициент *А* и плотность вероятности случайной величины *Х*. Определить вероятность неравенства http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image948.gif.**Решение.** Плотность распределения равна первой производной от функции распределенияhttp://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image949.gifКоэффициент *А* определяем с помощью равенстваhttp://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image950.gif,Отсюдаhttp://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image951.gif.Тот же результат можно было получить, используя непрерывность функции http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image943.gif в точке http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image952.gifhttp://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image938.gifhttp://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image953.gif, http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image954.gif.Следовательно, http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image955.gif.Поэтому плотность вероятности имеет видhttp://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image956.gifВероятность http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image957.gifПопадания случайной величины *Х* в заданный промежуток вычисляется по формулеhttp://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image958.gif.**Пример 8.5.** Случайная величина *Х* имеет плотность вероятности (закон Коши)http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image959.gif.Найти коэффициент *А* и вероятность того, что случайная величина *Х* примет какое-нибудь значение из интервала http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image960.gif. Найти функцию распре­деления этой случайной величины.**Решение.** Найдем коэффициент *А* из равенстваhttp://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image961.gif,Но http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image962.gifСледовательно, http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image963.gif.Итак, http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image964.gif.Вероятность того, что случайная величина *Х* примет какое-нибудь значение из интервала http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image960.gif, равнаhttp://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image965.gifНайдем функцию распределения данной случайной величиныhttp://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image966.gif

|  |
| --- |
|  |
| http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image967.gif |

**Пример 8.6.** График плотности вероятности случайной величины *Х* изображен на рис. 8.6 (закон Симпсона). Написать выражение плотности вероятности ифункцию распределения этой случайной величины.Рис. 8.6**Решение.** Пользуясь графиком, записываем аналитическое выражение плотности распределения вероятностей данной случайной величиныhttp://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image968.gifНайдем функцию распределения.Если http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image969.gif, то http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image970.gif.Если http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image971.gif, то http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image972.gif.Если http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image973.gif, то http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image974.gifhttp://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image975.gifЕсли http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image976.gif, то http://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image977.gifhttp://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image978.gifСледовательно, функция распределения имеет видhttp://matica.org.ua/images/stories/TVPBSCH/image979.gif |

**Геометрическая** **вероятность**

Геометрическая вероятностьсобытия A, являющегося подмножеством множества В точек на прямой, плоскости или в пространстве — это отношение мер данных объектов.

 *Задача 1: найдите вероятность того, что точка Х ближе к точке N, чем к M.*

*Решение:* пусть точка О – середина отрезка MN. Наше событие наступит тогда, когда точка Х лежит внутри отрезка ON.

** Тогда .

*Ответ:* 0.5

Таким образом, вероятность

может быть вычислена как отношение длин двух отрезков.

2. Выберем на географической карте мира случайную точку. Какова вероятность того, что эта точка окажется в России? Очевидно, что для ответа на вопрос нужно знать, какую часть всей площади карты составляет площадь России. Отношение этих двух площадей и даст искомую вероятность.

Р(А) = S(A)/S(B) , где Р – вероятность, а S – площадь.

*Задача 2: внутри прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 4, 6, 10 см, наудачу выбирается точка М. Какова вероятность того, что она окажется внутри данного куба, ребро которого 3 см.*

*Решение:* пусть событие Е – точка оказалась внутри куба с ребром, равным 3 см. Будем считать, что исходы испытания распределены равномерно. Тогда вероятность наступления события Е пропорциональна мере этого куба и равна P (E) = Uкуба / Uпараллелепипеда. Но объем куба равен 27 см3 , а объем параллелепипеда – 240 см3 . Следовательно, Р (Е) = 27/ 240 ≈ 0.113

*Ответ:* 0.113

**! Типичная ошибка при решении задач на геометрическую вероятность – несоответствие размерностей. Часто при вычислении геометрической вероятности длину делят на площадь или площадь на объем. В таких случаях полезно проверять полученную формулу для вероятности на «без размерность».**

3.Задачи на нахождение геометрической вероятности

*Задача 3: точку наудачу бросают в квадрат, сторона которого равна 1. Спрашивается, какова вероятность события, которое состоит в том, что расстояние от этой точки до ближайшей стороны квадрата не больше чем ? (рис.1)*

*Решение:* точка удалена от границы квадрата не более чем на , если она принадлежит внутреннему квадрату со стороной равной 1 – 2\* = *.*

Чтобы найти площадь фигуры, составляющей разницу между внутренним и внешним квадратами (G), нужно из площади всей фигуры (F) вычесть площадь внутреннего квадрата со стороной .



Тогда вероятность того, что точка попала в фигуру *G,* равна 

*Ответ:* 0.75

*Задача 4: единичный интервал делится на три части двумя случайными точками. Чему равна вероятность того, что из получившихся отрезков можно построить треугольник?*

*Решение:* необходимо найти вероятность того, что ни один из отрезков не превосходит суммы двух других. Для того, чтобы из трех отрезков можно было построить треугольник, точка, представляющая отрезки, должна лежать внутри треугольника, который получается соединением середин противоположных сторон треугольника (рис.2). Он имеет площадь, равную одной четверти большого треугольника, и, следовательно, вероятность равна одной четвертой.

 

*Ответ:* 0.25

***Задача 5****:* *два студента условились встретиться в определенном месте между 12-ю и 13-ю часами. Пришедший первым ждет другого не больше 20 минут, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча произойдет.*

*Решение:* пусть x - момент времени прихода первого студента, y - момент времени прихода второго студента. Тогда x, y € [0;60] (определение того, что встреча произойдет между 12 и 13 часами, то есть в промежуток времени в 60 минут) - задает область G (рис.3). |x-y| ≤ 20 (определение того, что студент, пришедший первым, ждет второго не больше 20 минут) - задает область g. Тогда области, задаваемые неравенствами, будут выглядеть следующим образом (рис.2). Вероятность можно будет найти как отношение площадей двух областей g и G. Р(A)=60\*60/(60\*60-40\*40) = 5/9.



*Ответ:* 5/9

*Задача 6:* согласно *правилам дорожного движения, пешеход может перейти улицу в неустановленном месте, если в пределах видимости нет пешеходных переходов. В городе Миргороде расстояние между пешеходными переходами на улице Солнечной равно 1 км. Пешеход переходит улицу Солнечную где-то между двумя переходами. Он может видеть знак перехода не дальше чем за 100 м от себя. Найдите вероятность того, что пешеход не нарушает правила.*

*Решение:* воспользуемся геометрическим методом. Расположим числовую прямую так, что участок улицы между переходами окажется отрезком [0;1]. Пусть пешеход подходит к улице в некоторой точке с координатой Х. Пешеход не нарушает правила, если он находится на расстоянии более чем 0,1 км от каждого перехода, т.е. 0,1<X<0,9. Найдем вероятность этого события: .

*Ответ:* 0.8

4.Проблемная задача

*Задача 7*: *в одном из лесных хозяйств Брянской области, представляющем собой прямоугольник a\*b гектаров, вспыхнул пожар. Огнем охвачена часть леса, которая является кругом с радиусом, равным r. Найдите вероятность того, что жидкость, распыляемая пролетающим над лесом самолетом, попадет в область пожара.*

*Решение:* Площадь леса равна а\*b, площадь горящей области – r2 . Тогда Р(А) = r2/а\*b

*Ответ:* r2/а\*b

Таким образом, знакомство с теорией вероятности помогло мне в решении проблемы. После составления и решения задачи 7, я могу сказать, что можно найти много вариантов практического применения геометрической вероятности.