**ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ**

**Тема: «Гипергеометрическое распределение»**

Пожалуй, второе по распространённости после [**биномиального распределения**](http://www.mathprofi.ru/binomialnoe_raspredelenie_veroyatnostei.html), в котором нет ничего гиперсложного. Да и сложного тоже. С гипергеометрическим законом распределения вероятностей мы неоднократно сталкивались ранее и фактически полностью построили в [**классическом определении вероятности**](http://www.mathprofi.ru/zadachi_na_klassicheskoe_opredelenie_verojatnosti_primery_reshenij.html). Сформулируем задачу в общем виде и вспомним этот пример:

Пусть в совокупности из  объектов содержатся  объектов, обладающие некоторым признаком. Из этой совокупности случайным образом и без возвращения извлекается  объектов.

Тогда [**случайная величина**](http://www.mathprofi.ru/sluchainaya_velichina.html)  – количество «особых» объектов в выборке – распределена по гипергеометрическому закону.

В ящике находится ** деталей, среди которых ** бракованных. Наудачу извлекаются ** детали. Найти вероятность того, что:

а) обе детали будут качественными;

б) одна деталь будет качественной, а одна – бракованной;

в) обе детали бракованные

По сути дела, здесь фигурирует [**случайная величина**](http://www.mathprofi.ru/sluchainaya_velichina.html)  – количество бракованных деталей в выборке. Порешаем задачу под другим углом зрения, а именно, найдём закон распределения этой случайной величины, которая, очевидно, может принять одно из следующих значений: . Соответствующие вероятности  определяются [**правилами и формулами комбинаторики**](http://www.mathprofi.ru/zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij.html) и [**классическим определением вероятности**](http://www.mathprofi.ru/zadachi_na_klassicheskoe_opredelenie_verojatnosti_primery_reshenij.html).

Сначала вычислим количество всех возможных наборов из 2 деталей. Две детали можно выбрать  [**способами**](http://www.mathprofi.ru/zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij.html). Дальнейшие действия удобно занумеровать:

0)  (в выборке нет бракованных деталей)
 способами можно извлечь 2 качественные детали.
По [**классическому определению**](http://www.mathprofi.ru/zadachi_na_klassicheskoe_opredelenie_verojatnosti_primery_reshenij.html):  – вероятность того, среди 2 извлечённых деталей не будет бракованных.

1) 
 способами можно извлечь 1 качественную деталь [**и**](http://www.mathprofi.ru/zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij.html) 1 бракованную.
По тому же определению:  – вероятность того, среди 2 извлечённых деталей будет 1 бракованная.

2) И, наконец, 

 способами можно извлечь 2 бракованные детали.
 – вероятность того, что обе извлечённые детали будут бракованными.

Таким образом, закон распределения количества бракованных деталей в выборке:


Контроль: 

Следует отметить, что «зеркальная» случайная величина  – количество качественных деталей в выборке, тоже имеет гипергеометрическое распределение. Догадайтесь с одного раза, как выглядит её закон распределения. НО, **к этому вопросу нельзя подходить формально!** Самостоятельно разберите такую ситуацию:

Задание

Из ящика с 19 стандартными и 1 нестандартной деталью, наудачу извлекается 2 детали. Составить закон распределения случайной величины  – количества стандартных деталей в выборке.

Решение и ответ в конце урока.

…Разминка прошла успешно? Отлично! Теперь разберём более содержательную задачу, в которой я расскажу вам об общих формулах и полезных технических приёмах решения. Как в передаче «Что? Где? Когда?» выносят чёрные ящики, так в теории вероятностей предлагают урны с шарами :)

Задача

Из урны, содержащей 6 белых и 4 черных шара, случайным образом и без возвращения извлекают 3 шара.

**! Примечание**: оговорка «без возвращения» является важной, но её часто опускают, подразумевая этот факт по умолчанию

Составить функцию распределения случайной величины  – числа черных шаров среди взятых. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины. Построить многоугольник и функцию распределению. Вычислить вероятность того, что в выборке будет не менее двух чёрных шаров. Вычислить .

Как говорится, весь джентльменский набор. Кстати, если не нравятся шары, можете представить, что это белые и чёрные котята или…, не знаю, например, красные и чёрные карты.

**Решение**: поскольку в условии речь идёт о выборке объектов из совокупности и о количестве «особенных» объектов в этой выборке, то предложенная случайная величина имеет гипергеометрическое распределение вероятностей.

Обозначим исходные данные стандартными буквами:

 – размер совокупности;
  – количество черных шаров в совокупности («особенный» признак);
 размер выборки.

Очевидно, что случайная величина  (кол-во чёрных шаров в выборке)  принимает следующие значения:


Заметьте, что этих значений может быть и меньше. В каком случае? В случае если , то есть, если во всей совокупности чёрных шаров МЕНЬШЕ, чем размер выборки. Так, например, если в урне всего 2 чёрных шара, то значение  отпадёт.

Для вычисления гипергеометрических вероятностей существует формула , но я вам крайне советую **вникать в смысл** выполняемых действий. Сначала вычислим знаменатель дроби:

 способами можно выбрать 3 шара из 10. Данное значение нам потребуется при вычислении каждой вероятности

 :

1.  (в выборке нет чёрных шаров)

 способами можно выбрать 0 чёрных и 3 белых шара.

***По классическому определению:***

 – вероятность того, что в выборке будет 0 черных шаров.

Результаты лучше записывать в трёх видах: несокращённой обыкновенной дробью, сокращённой обыкновенной дробью и десятичной дробью (с 3-4-5 знаками после запятой). Это упростит решение, и скоро будет понятно, как.

Кроме того, вероятности выгодно знать заранее. Для этого можно использовать экселевскую функцию =ГИПЕРГЕОМЕТ(x; n; M; N) или сразу воспользоваться готовым [**расчётным макетом**](http://www.mathprofi.ru/files/terver.xls) (Пункт 8).

Едем дальше:

1. 
 способами можно выбрать 1 чёрный и 2 белых шара.

 – вероятность того, что в выборке окажется 1 чёрный шар.

2) 
 способами можно выбрать 2 чёрных и 1 белый шар.
 – вероятность того, что в выборке окажется 2 чёрных шара.

3) 
 способами можно выбрать 3 чёрных и 0 белых шаров.
 – вероятность того, что в выборке будет 3 чёрных шара.

Таким образом, количество чёрных шаров в выборке распределено по следующему закону:


**Вероятности по возможности записываем обыкновенными дробями!**

Контроль: , ч.т.п.

В крайнем случае можно использовать десятичные дроби (когда обыкновенные сильно наворочены), единственное, нужно следить, чтобы сумма округлённых значений равнялась единице и при необходимости «подгонять» некоторые вероятности. Однако помните, что это уже будет **не точным** ответом!

Но десятичные значения, безусловно, удобны для построения [**многоугольника распределения**](http://www.mathprofi.ru/funkcia_raspredeleniya_dsv.html):



[**Математическое ожидание**](http://www.mathprofi.ru/sluchainaya_velichina.html) и [**дисперсию**](http://www.mathprofi.ru/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny.html) гипергеометрического распределения можно вычислить в обход общего алгоритма – по специальным формулам:

 – среднее количество чёрных шаров в выборке (при многократном повторении таких выборок).

 – мера рассеяния количества чёрных шаров относительно матожидания.

Составим [**функцию распределения вероятностей**](http://www.mathprofi.ru/funkcia_raspredeleniya_dsv.html). И здесь как раз пригодятся несокращённые обыкновенные дроби. Вычислим накопленные частоты:

 – десятичные значения нужны для ручного построения графика.


Таким образом, искомая функция:

**– её значения тоже записываем обыкновенными дробями!** Дабы соблюсти точность.

Строим график:



Выходим на финишную прямую. Вычислим  – вероятность того, что в выборке будет не менее двух чёрных шаров. Это можно сделать не единственным способом. Прямым суммированием вероятностей [**несовместных исходов**](http://www.mathprofi.ru/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html):


или с помощью [**функции распределения**](http://www.mathprofi.ru/funkcia_raspredeleniya_dsv.html) и штатной формулы :


Напомню, что здесь существуют **критично важные** тонкости (см. по ссылке выше).

И, наконец, рассчитываем стандартную вероятность  того, что значение [**случайной величины**](http://www.mathprofi.ru/sluchainaya_velichina.html)  отклонится от [**математического ожидания**](http://www.mathprofi.ru/sluchainaya_velichina.html) не более чем на одно [**среднее квадратическое отклонение**](http://www.mathprofi.ru/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny.html):


Готово.

Основная трудность ГТ-распределений состоит в технике вычислений – в них нужно грамотно управляться с дробями, которые частенько получаются страшноватыми. Ну, и конечно, не забываем о том, КАКАЯ ИМЕННО дана случайная величина. Так, в разобранном задании может быть предложено  – количество белых шаров в выборке, и тогда решение примет «зеркальный» характер.

Решение и ответ на задание:

** способами можно извлечь две детали.
Случайная величина ** может принять одно из следующих значений: **.
**Примечание**: значение ** невозможно, т.к. в ящике только 1 нестандартная деталь.
Составим закон распределения этой случайной величины:
1) **
** способами можно извлечь 1 стандартную и 1 нестандартную деталь.
По классическому определению: **

2) **
** способами можно извлечь 2 стандартные детали.
**
Контроль: **

**Ответ**: закон распределения количества стандартных деталей в данной выборке:
**

# И так сделаем вывод!

# Гипергеометрическое распределение

Пусть имеется *N* элементов, из которых *М* элементов обладают некоторым признаком *А*. Извлекаются случайным образом без возвращения *n* элементов. *Х* — дискретная случайная величина, число элементов, обладающих признаком *А*, среди отобранных *n* элементов. Вероятность, что *Х = m* определяется по формуле

.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по гипергеометрическому закону, определяются формулами:

,

.

**Пример 7.2.**В аккредитации участвуют 4 коммерческих вуза. Вероятности пройти аккредитацию и получить сертификат для этих вузов, соответственно равны 0,5; 0,4; 0,3; 0,2. Составить закон распределения числа коммерческих вузов, не прошедших аккредитацию. Найти числовые характеристики этого распределения.

**Решение.** В качестве случайной величины *Х* выступает число коммерческих вузов, не прошедших аккредитацию. Возможные значения, которые может принять случайная величина *Х*: 0, 1, 2, 3, 4.

Для составления закона распределения необходимо рассчитать соответствующие вероятности. Обозначим через событие  — первый вуз прошел аккредитацию, — второй, — третий, — четвертый. Тогда;;;. Вероятности для вузов не пройти аккредитацию соответственно равны;;;.

Тогда имеем:

.









Запишем закон распределения в виде таблицы

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| *Р* | 0,012 | 0,106 | 0,320 | 0,394 | 0,168 |

Проверка: 0,012 + 0,106 + 0,32 + 0,394 + 0,168 = 1.

Вычислим

.

Вычислим :

,

..

**Пример 7.3.** Вероятность того, что в библиотеке необходимая студенту книга свободна, равна 0,3. Составить закон распределения числа библиотек, которые последовательно посетит студент, чтобы взять необходимую книгу, если в городе 3 библиотеки.

**Решение.** В качестве случайной величины *Х* выступает число библиотек, которые посетит студент, чтобы получить необходимую книгу. Возможные значения, которые примет случайная величина *Х*: 1, 2, 3.

Обозначим через событие  — книга свободна в первой библиотеке, — во второй, — в третьей. Тогда.Вероятность противоположного события, что книга занята 

.

Для составления закона распределения рассчитаем соответствующие вероятности:

,

,



Запишем закон распределения в виде таблицы.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Х* | 1 | 2 | 3 |
| *Р* | 0,3 | 0,21 | 0,49 |

Проверка: 0,3 + 0,21 + 0,49 = 1.

**Пример 7.4.** Из поступающих в ремонт 10 часов 7 нуждаются в общей чистке механизма. Часы не рассортированы по виду ремонта. Мастер, желая найти часы, нуждающиеся в чистке, рассматривает их поочередно и, найдя такие часы, прекращает дальнейший просмотр. Составить закон распределения числа просмотренных часов. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

**Решение.** В качестве случайной величины *Х* выступает число просмотренных часов. Возможные значения, которые примет случайная величина *Х*: 1, 2, 3, 4. Все значения случайной величины зависимы.

Для составления закона распределения вычислим вероятности того, что случайная величина примет каждое из своих возможных значений. Для расчета вероятностей будем использовать формулу классической вероятности и теорему умножения для зависимых событий.

Пусть событие  — первые, взятые наугад, часы, нуждающиеся в чистке, — вторые, — третьи, — четвертые. Тогда имеем:

,

,

,



Запишем закон распределения в виде таблицы

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | 1 | 2 | 3 | 4 |
| *Р* | https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-bA0H1Q.png | https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-W73m5R.png | https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-YkZwBu.png | https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-pBOzUQ.png |

Проверим, что :

.

Вычислим математическое ожидание случайной величины по формуле

.

Вычислим дисперсию случайной величины по формуле

.

Вычислим ,

.

**Пример 7.5.** Известно, что в определенном городе 20 % горожан добираются на работу личным автотранспортом. Случайно выбраны 4 человека. Составить закон распределения числа людей, добирающихся на работу личным автотранспортом. Найти числовые характеристики этого распределения. Написать функцию распределения и построить ее график.

**Решение.** В качестве случайной величины *Х* выступает число людей в выборке, которые добираются на работу личным автотранспортом. Возможные значения, которые может принять случайная величина *Х*: 0, 1, 2, 3, 4.

Вероятность того, что каждый из отобранных людей, которые добираются на работу личным автотранспортом, постоянна и равна . Вероятность противоположного события, т.е. того, что каждый из отобранных людей добирается на работу не личным автотранспортом, равна. Все 4 испытания независимы. Случайная величинаподчиняется биномиальному закону распределения вероятностей с параметрами;;. Для составления закона распределения вычислим вероятности того, что случайная величина примет каждое из своих возможных значений.

Расчет искомых вероятностей осуществляется по формуле Бернулли:

.

,

,

,

,

.

Запишем закон распределения в виде таблицы

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| *Р* | 0,4096 | 0,4096 | 0,1536 | 0,0256 | 0,0016 |

Так как все возможные значения случайной величины образуют полную группу событий, то сумма их вероятностей должна быть равна 1.

Проверка: 0,4096 + 0,4096 + 0,1536 + 0,0256 + 0,0016 = 1.

Найдем числовые характеристики дискретной случайной величины: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Математическое ожидание может быть рассчитано по формуле

.

Так как случайная величина подчиняется биноминальному закону, то для расчета математического ожидания можно воспользоваться формулой

.

Дисперсия случайной величины может быть рассчитана по формуле:

,



.

В данном случае дисперсию можно рассчитать по формуле

.

Рассчитаем среднее квадратическое отклонение случайной величины по формуле

.

Составим функцию распределения случайной величины *Х*по формуле

.

1. .
2. .
3. .
4. .
5. .
6. .

Запишем функцию распределения



График функции распределения вероятностей имеет ступенчатый вид (рис. 7.3). Скачки равны вероятностям, с которыми случайная величина принимает возможные значения.

*Рис. 7.3*

**Пример 7.6.** Клиенты банка, не связанные друг с другом, не возвращают кредиты в срок с вероятностью 0,1. Составить закон распределения числа возвращенных в срок кредитов из 5 выданных. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

**Решение.** В качестве случайной величины *Х* выступает число кредитов, возвращенных клиентами в срок. Возможные значения, которые может принять случайная величина *Х*: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Вероятность того, что каждый клиент возвратит кредит в срок, постоянна и равна . Вероятность того, что кредит не будет возвращен в срок, равна. Все 5 испытаний независимы. Случайная величина подчиняется биномиальному распределению с параметрами;;;. Для составления закона распределения вычислим вероятности того, что случайная величина примет каждое из своих возможных значений. Расчет искомых вероятностей осуществляется по формуле Бернулли

,

,

,

,

,

,

.

Запишем закон распределения в виде таблицы

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| *Р* | 0,00001 | 0,00045 | 0,0081 | 0,0729 | 0,32805 | 0,59049 |

Математическое ожидание вычислим по формуле

.

Дисперсию вычислим по формуле

.

**Пример 7.7.**Из 10 телевизоров на выставке оказались 4 телевизора фирмы «Сони». Наудачу для осмотра выбраны 3 телевизора. Составить закон распределения числа телевизоров фирмы «Сони» среди 3 отобранных.

**Решение.** В качестве случайной величины *Х* выступает число телевизоров фирмы «Сони». Возможные значения, которые может принять случайная величина *Х*: 0, 1, 2, 3. Для составления закона распределения вычислим вероятности того, что случайная величина примет каждое из своих возможных значений. Эти вероятности можно рассчитать по формуле классической вероятности :

;

.

Запишем закон распределения

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | 0 | 1 | 2 | 3 |
| *Р* | https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-YLTNSK.png | https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-Kpslnx.png | https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-6DL1lZ.png | https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-hb5BIp.png |

Убедимся, что .

**Пример 7.8.**На двух автоматических станках производятся одинаковые изделия. Даны законы распределения числа бракованных изделий, производимых в течение смены на каждом из них:

*Х*: для первого

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | 0 | 1 | 2 | 3 |
| *Р* | 0,1 | 0,6 | 0,2 | 0,1 |

*Y*: для второго

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Y* | https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-7Nsp_l.png | 0 | 1 | 2 |
| *Р* | https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-D6kNGq.png | 0,5 | 0,3 | 0,2 |

Составить закон распределения числа производимых в течение смены бракованных изделий обоими станками. Проверить свойство математического ожидания суммы случайных величин.

**Решение.** Для того чтобы составить закон распределения *Х*+*Y* необходимо складывать, а соответствующие им вероятности умножить:

;,

;,

;,

;,

;,

;,

,

,

,

,

,

.

Закон распределения запишем в виде таблицы

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х + Y* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| *P* | 0,05 | 0,33 | 0,3 | 0,23 | 0,07 | 0,02 |

Проверим свойство математического ожидания :

,

,

,

.

**Пример 7.9.**Дискретная случайная величина *Х* имеет только два возможных значения:и, причем. Вероятность того, что *Х* примет значение, равна 0,6. Найти закон распределения величины *Х*, если математическое ожидание;.

**Решение.** Сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины равна единице, поэтому вероятность того, что *Х* примет значение. Напишем закон распределения *Х*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *X* | https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-kcpC4J.png | https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-ISV8Mm.png |
| *P* | 0,6 | 0,4 |

Для того чтобы отыскать инеобходимо составить два уравнения. Из условия задачи следует, что,.

Составим систему уравнений



Решив эту систему, имеем ;и;.

По условию , поэтому задаче удовлетворяет лишь первое решение, т.е.;. Тогда закон распределения имеет вид

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *X* | 1 | 2 |
| *P* | 0,6 | 0,4 |

**Пример 7.10.**Случайные величиныинезависимы. Найти дисперсию случайной величины, если известно, что,.

**Решение.** Так как имеют место свойства дисперсии

и, то получим

