**ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ**

**Тема: «Гипергеометрическое распределение»**

Пожалуй, второе по распространённости после [**биномиального распределения**](http://www.mathprofi.ru/binomialnoe_raspredelenie_veroyatnostei.html), в котором нет ничего гиперсложного. Да и сложного тоже. С гипергеометрическим законом распределения вероятностей мы неоднократно сталкивались ранее и фактически полностью построили в [**классическом определении вероятности**](http://www.mathprofi.ru/zadachi_na_klassicheskoe_opredelenie_verojatnosti_primery_reshenij.html). Сформулируем задачу в общем виде и вспомним этот пример:

Пусть в совокупности из http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image002.gif объектов содержатся http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image004.gif объектов, обладающие некоторым признаком. Из этой совокупности случайным образом и без возвращения извлекается http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image006.gif объектов.

Тогда [**случайная величина**](http://www.mathprofi.ru/sluchainaya_velichina.html) http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image008.gif – количество «особых» объектов в выборке – распределена по гипергеометрическому закону.

В ящике находится *http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image010.gif* деталей, среди которых *http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image012.gif* бракованных. Наудачу извлекаются *http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image014.gif* детали. Найти вероятность того, что:

а) обе детали будут качественными;

б) одна деталь будет качественной, а одна – бракованной;

в) обе детали бракованные

По сути дела, здесь фигурирует [**случайная величина**](http://www.mathprofi.ru/sluchainaya_velichina.html) http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image008_0000.gif – количество бракованных деталей в выборке. Порешаем задачу под другим углом зрения, а именно, найдём закон распределения этой случайной величины, которая, очевидно, может принять одно из следующих значений: http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image017.gif. Соответствующие вероятности http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image019.gif определяются [**правилами и формулами комбинаторики**](http://www.mathprofi.ru/zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij.html) и [**классическим определением вероятности**](http://www.mathprofi.ru/zadachi_na_klassicheskoe_opredelenie_verojatnosti_primery_reshenij.html).

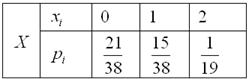
Сначала вычислим количество всех возможных наборов из 2 деталей. Две детали можно выбрать http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image021.gif [**способами**](http://www.mathprofi.ru/zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij.html). Дальнейшие действия удобно занумеровать:

0) http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image023.gif (в выборке нет бракованных деталей)  
http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image025.gif способами можно извлечь 2 качественные детали.  
По [**классическому определению**](http://www.mathprofi.ru/zadachi_na_klassicheskoe_opredelenie_verojatnosti_primery_reshenij.html): http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image027.gif – вероятность того, среди 2 извлечённых деталей не будет бракованных.

1) http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image029.gif  
http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image031.gif способами можно извлечь 1 качественную деталь [**и**](http://www.mathprofi.ru/zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij.html) 1 бракованную.  
По тому же определению: http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image033.gif – вероятность того, среди 2 извлечённых деталей будет 1 бракованная.

2) И, наконец, http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image035.gif

http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image037.gif способами можно извлечь 2 бракованные детали.  
http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image039.gif – вероятность того, что обе извлечённые детали будут бракованными.

Таким образом, закон распределения количества бракованных деталей в выборке:  


Контроль: http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image043.gif

Следует отметить, что «зеркальная» случайная величина http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image045.gif – количество качественных деталей в выборке, тоже имеет гипергеометрическое распределение. Догадайтесь с одного раза, как выглядит её закон распределения. НО, **к этому вопросу нельзя подходить формально!** Самостоятельно разберите такую ситуацию:

Задание

Из ящика с 19 стандартными и 1 нестандартной деталью, наудачу извлекается 2 детали. Составить закон распределения случайной величины http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image008_0001.gif – количества стандартных деталей в выборке.

Решение и ответ в конце урока.

…Разминка прошла успешно? Отлично! Теперь разберём более содержательную задачу, в которой я расскажу вам об общих формулах и полезных технических приёмах решения. Как в передаче «Что? Где? Когда?» выносят чёрные ящики, так в теории вероятностей предлагают урны с шарами :)

Задача

Из урны, содержащей 6 белых и 4 черных шара, случайным образом и без возвращения извлекают 3 шара.

**! Примечание**: оговорка «без возвращения» является важной, но её часто опускают, подразумевая этот факт по умолчанию  
  
Составить функцию распределения случайной величины http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image008_0002.gif – числа черных шаров среди взятых. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины. Построить многоугольник и функцию распределению. Вычислить вероятность того, что в выборке будет не менее двух чёрных шаров. Вычислить http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image048.gif.

Как говорится, весь джентльменский набор. Кстати, если не нравятся шары, можете представить, что это белые и чёрные котята или…, не знаю, например, красные и чёрные карты.

**Решение**: поскольку в условии речь идёт о выборке объектов из совокупности и о количестве «особенных» объектов в этой выборке, то предложенная случайная величина имеет гипергеометрическое распределение вероятностей.

Обозначим исходные данные стандартными буквами:

http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image050.gif – размер совокупности;  
http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image052.gif  – количество черных шаров в совокупности («особенный» признак);  
http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image054.gif размер выборки.

Очевидно, что случайная величина http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image008_0003.gif (кол-во чёрных шаров в выборке)  принимает следующие значения:  
http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image056.gif

Заметьте, что этих значений может быть и меньше. В каком случае? В случае если http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image058.gif, то есть, если во всей совокупности чёрных шаров МЕНЬШЕ, чем размер выборки. Так, например, если в урне всего 2 чёрных шара, то значение http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image060.gif отпадёт.

Для вычисления гипергеометрических вероятностей существует формула http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image062.gif, но я вам крайне советую **вникать в смысл** выполняемых действий. Сначала вычислим знаменатель дроби:

http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image064.gif способами можно выбрать 3 шара из 10. Данное значение нам потребуется при вычислении каждой вероятности

http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image066.gif:

1. http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image068.gif (в выборке нет чёрных шаров)

http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image070.gif способами можно выбрать 0 чёрных и 3 белых шара.

***По классическому определению:***

http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image072.gif – вероятность того, что в выборке будет 0 черных шаров.

Результаты лучше записывать в трёх видах: несокращённой обыкновенной дробью, сокращённой обыкновенной дробью и десятичной дробью (с 3-4-5 знаками после запятой). Это упростит решение, и скоро будет понятно, как.

Кроме того, вероятности выгодно знать заранее. Для этого можно использовать экселевскую функцию =ГИПЕРГЕОМЕТ(x; n; M; N) или сразу воспользоваться готовым [**расчётным макетом**](http://www.mathprofi.ru/files/terver.xls) (Пункт 8).

Едем дальше:

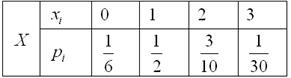
1. http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image074.gif  
   http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image076.gif способами можно выбрать 1 чёрный и 2 белых шара.

http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image078.gif – вероятность того, что в выборке окажется 1 чёрный шар.

2) http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image080.gif  
http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image082.gif способами можно выбрать 2 чёрных и 1 белый шар.  
http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image084.gif – вероятность того, что в выборке окажется 2 чёрных шара.

3) http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image086.gif  
http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image088.gif способами можно выбрать 3 чёрных и 0 белых шаров.  
http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image090.gif – вероятность того, что в выборке будет 3 чёрных шара.

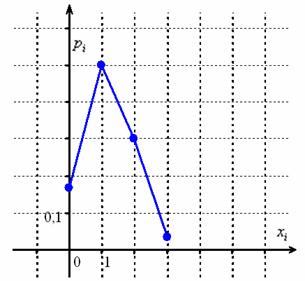
Таким образом, количество чёрных шаров в выборке распределено по следующему закону:

  
**Вероятности по возможности записываем обыкновенными дробями!**

Контроль: http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image094.gif, ч.т.п.

В крайнем случае можно использовать десятичные дроби (когда обыкновенные сильно наворочены), единственное, нужно следить, чтобы сумма округлённых значений равнялась единице и при необходимости «подгонять» некоторые вероятности. Однако помните, что это уже будет **не точным** ответом!

Но десятичные значения, безусловно, удобны для построения [**многоугольника распределения**](http://www.mathprofi.ru/funkcia_raspredeleniya_dsv.html):

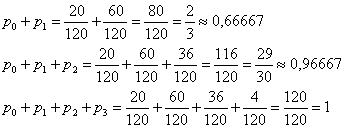


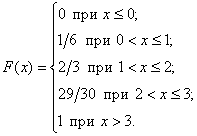
[**Математическое ожидание**](http://www.mathprofi.ru/sluchainaya_velichina.html) и [**дисперсию**](http://www.mathprofi.ru/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny.html) гипергеометрического распределения можно вычислить в обход общего алгоритма – по специальным формулам:

http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image098.gif – среднее количество чёрных шаров в выборке (при многократном повторении таких выборок).

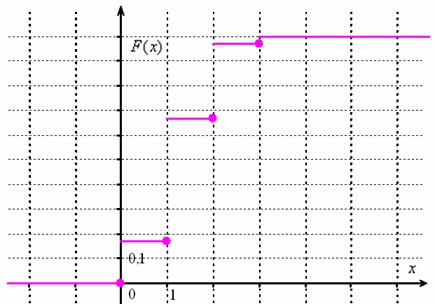
http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image100.gif – мера рассеяния количества чёрных шаров относительно матожидания.

Составим [**функцию распределения вероятностей**](http://www.mathprofi.ru/funkcia_raspredeleniya_dsv.html). И здесь как раз пригодятся несокращённые обыкновенные дроби. Вычислим накопленные частоты:

http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image102.gif – десятичные значения нужны для ручного построения графика.  


Таким образом, искомая функция:  
  
**– её значения тоже записываем обыкновенными дробями!** Дабы соблюсти точность.

Строим график:

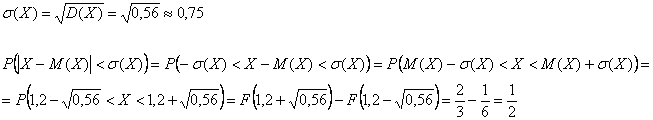


Выходим на финишную прямую. Вычислим http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image110.gif – вероятность того, что в выборке будет не менее двух чёрных шаров. Это можно сделать не единственным способом. Прямым суммированием вероятностей [**несовместных исходов**](http://www.mathprofi.ru/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html):  
http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image112.gif

или с помощью [**функции распределения**](http://www.mathprofi.ru/funkcia_raspredeleniya_dsv.html) и штатной формулы http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image114.gif:

http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image116.gif  
Напомню, что здесь существуют **критично важные** тонкости (см. по ссылке выше).

И, наконец, рассчитываем стандартную вероятность http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image118.gif того, что значение [**случайной величины**](http://www.mathprofi.ru/sluchainaya_velichina.html) http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image008_0004.gif отклонится от [**математического ожидания**](http://www.mathprofi.ru/sluchainaya_velichina.html) не более чем на одно [**среднее квадратическое отклонение**](http://www.mathprofi.ru/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny.html):

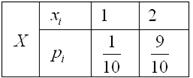
  
Готово.

Основная трудность ГТ-распределений состоит в технике вычислений – в них нужно грамотно управляться с дробями, которые частенько получаются страшноватыми. Ну, и конечно, не забываем о том, КАКАЯ ИМЕННО дана случайная величина. Так, в разобранном задании может быть предложено http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image045_0000.gif – количество белых шаров в выборке, и тогда решение примет «зеркальный» характер.

Решение и ответ на задание:

*http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image123.gif* способами можно извлечь две детали.  
Случайная величина *http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image008_0005.gif* может принять одно из следующих значений: *http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image125.gif*.  
**Примечание**: значение *http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image023_0000.gif* невозможно, т.к. в ящике только 1 нестандартная деталь.  
Составим закон распределения этой случайной величины:  
1) *http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image029_0000.gif*  
*http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image127.gif* способами можно извлечь 1 стандартную и 1 нестандартную деталь.  
По классическому определению: *http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image129.gif*

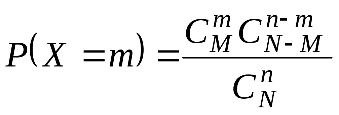
2) *http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image035_0000.gif*  
*http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image132.gif* способами можно извлечь 2 стандартные детали.  
*http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image134.gif*  
Контроль: *http://www.mathprofi.ru/t/gipergeometricheskoe_raspredelenie_veroyatnostei_clip_image136.gif*

**Ответ**: закон распределения количества стандартных деталей в данной выборке:  
**

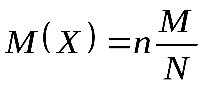
# И так сделаем вывод!

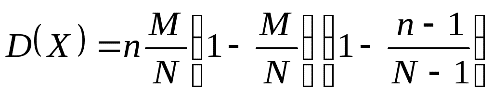
# Гипергеометрическое распределение

Пусть имеется *N* элементов, из которых *М* элементов обладают некоторым признаком *А*. Извлекаются случайным образом без возвращения *n* элементов. *Х* — дискретная случайная величина, число элементов, обладающих признаком *А*, среди отобранных *n* элементов. Вероятность, что *Х = m* определяется по формуле

.

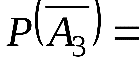
Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по гипергеометрическому закону, определяются формулами:

,

.

**Пример 7.2.**В аккредитации участвуют 4 коммерческих вуза. Вероятности пройти аккредитацию и получить сертификат для этих вузов, соответственно равны 0,5; 0,4; 0,3; 0,2. Составить закон распределения числа коммерческих вузов, не прошедших аккредитацию. Найти числовые характеристики этого распределения.

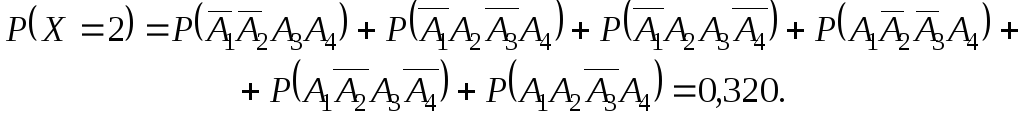
**Решение.** В качестве случайной величины *Х* выступает число коммерческих вузов, не прошедших аккредитацию. Возможные значения, которые может принять случайная величина *Х*: 0, 1, 2, 3, 4.

Для составления закона распределения необходимо рассчитать соответствующие вероятности. Обозначим через событие https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-SXyi6j.png — первый вуз прошел аккредитацию,https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-MoMGz2.png — второй,https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-JkraJz.png — третий,https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-cxSrjR.png — четвертый. Тогдаhttps://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-2cCHLc.png;https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-3JTRwo.png;https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-RSvZ8u.png;https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-TPrK8n.png. Вероятности для вузов не пройти аккредитацию соответственно равныhttps://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-HWl6PN.png;https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-uK_Q7C.png;https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-6dzIl3.png;https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-Bs976v.png.

Тогда имеем:

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-RXffPw.png.

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-ULSBta.png



https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-IXTAdF.png

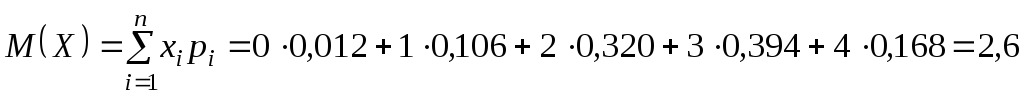
https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-o5wWHP.png

Запишем закон распределения в виде таблицы

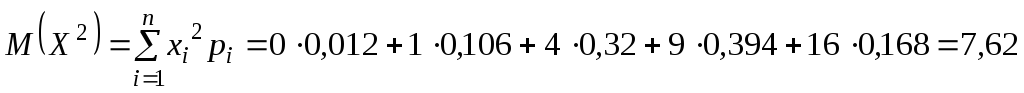
|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| *Р* | 0,012 | 0,106 | 0,320 | 0,394 | 0,168 |

Проверка: 0,012 + 0,106 + 0,32 + 0,394 + 0,168 = 1.

Вычислим

.

Вычислим https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-H2ZS7P.png:

,

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-4Pz8_I.png.https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-MMLUO5.png.

**Пример 7.3.** Вероятность того, что в библиотеке необходимая студенту книга свободна, равна 0,3. Составить закон распределения числа библиотек, которые последовательно посетит студент, чтобы взять необходимую книгу, если в городе 3 библиотеки.

**Решение.** В качестве случайной величины *Х* выступает число библиотек, которые посетит студент, чтобы получить необходимую книгу. Возможные значения, которые примет случайная величина *Х*: 1, 2, 3.

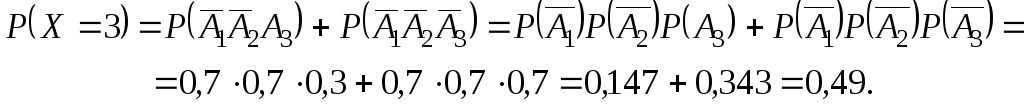
Обозначим через событие https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-3UKNgx.png — книга свободна в первой библиотеке,https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-kZifuU.png — во второй,https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-TcDU7S.png — в третьей. Тогдаhttps://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-fHEKX0.png.Вероятность противоположного события, что книга занята https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-PuNzes.png

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-B1gSv8.png.

Для составления закона распределения рассчитаем соответствующие вероятности:

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-Oe7J_W.png,

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-diFezS.png,



Запишем закон распределения в виде таблицы.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Х* | 1 | 2 | 3 |
| *Р* | 0,3 | 0,21 | 0,49 |

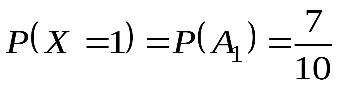
Проверка: 0,3 + 0,21 + 0,49 = 1.

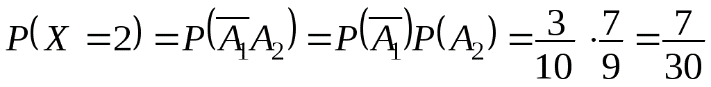
**Пример 7.4.** Из поступающих в ремонт 10 часов 7 нуждаются в общей чистке механизма. Часы не рассортированы по виду ремонта. Мастер, желая найти часы, нуждающиеся в чистке, рассматривает их поочередно и, найдя такие часы, прекращает дальнейший просмотр. Составить закон распределения числа просмотренных часов. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

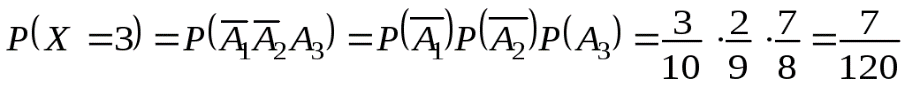
**Решение.** В качестве случайной величины *Х* выступает число просмотренных часов. Возможные значения, которые примет случайная величина *Х*: 1, 2, 3, 4. Все значения случайной величины зависимы.

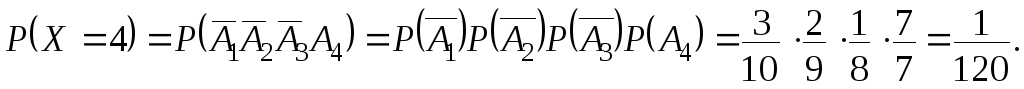
Для составления закона распределения вычислим вероятности того, что случайная величина примет каждое из своих возможных значений. Для расчета вероятностей будем использовать формулу классической вероятности и теорему умножения для зависимых событий.

Пусть событие https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-DPtM_L.png — первые, взятые наугад, часы, нуждающиеся в чистке,https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-sdmJ8_.png — вторые,https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-wnl8ZQ.png — третьи,https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-Qu1Vrh.png — четвертые. Тогда имеем:

,

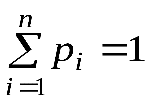
,

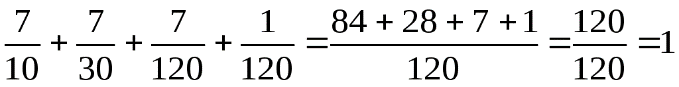
,



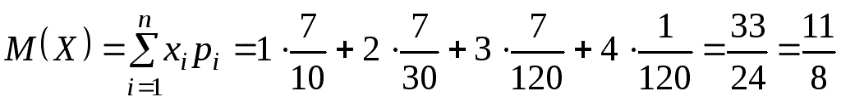
Запишем закон распределения в виде таблицы

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | 1 | 2 | 3 | 4 |
| *Р* | https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-bA0H1Q.png | https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-W73m5R.png | https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-YkZwBu.png | https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-pBOzUQ.png |

Проверим, что :

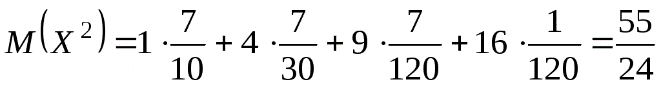
.

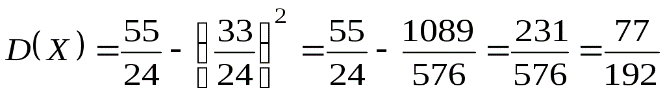
Вычислим математическое ожидание случайной величины по формуле

.

Вычислим дисперсию случайной величины по формуле

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-6BztGe.png.

Вычислим ,

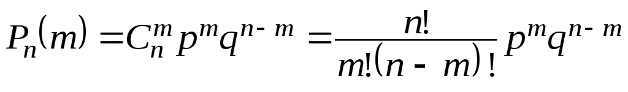
.

**Пример 7.5.** Известно, что в определенном городе 20 % горожан добираются на работу личным автотранспортом. Случайно выбраны 4 человека. Составить закон распределения числа людей, добирающихся на работу личным автотранспортом. Найти числовые характеристики этого распределения. Написать функцию распределения и построить ее график.

**Решение.** В качестве случайной величины *Х* выступает число людей в выборке, которые добираются на работу личным автотранспортом. Возможные значения, которые может принять случайная величина *Х*: 0, 1, 2, 3, 4.

Вероятность того, что каждый из отобранных людей, которые добираются на работу личным автотранспортом, постоянна и равна https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-3mW209.png. Вероятность противоположного события, т.е. того, что каждый из отобранных людей добирается на работу не личным автотранспортом, равнаhttps://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-K73AKB.png. Все 4 испытания независимы. Случайная величинаhttps://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-AeSdpx.pngподчиняется биномиальному закону распределения вероятностей с параметрамиhttps://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-Ac6HWQ.png;https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-IjcNK3.png;https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-WejVt4.png. Для составления закона распределения вычислим вероятности того, что случайная величина примет каждое из своих возможных значений.

Расчет искомых вероятностей осуществляется по формуле Бернулли:

.

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-K_ChdB.png,

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-rDNRgQ.png,

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-lTzYMk.png,

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-00lPmL.png,

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-zljxXo.png.

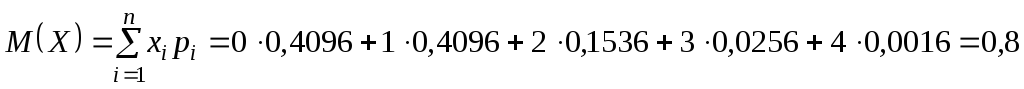
Запишем закон распределения в виде таблицы

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| *Р* | 0,4096 | 0,4096 | 0,1536 | 0,0256 | 0,0016 |

Так как все возможные значения случайной величины образуют полную группу событий, то сумма их вероятностей должна быть равна 1.

Проверка: 0,4096 + 0,4096 + 0,1536 + 0,0256 + 0,0016 = 1.

Найдем числовые характеристики дискретной случайной величины: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Математическое ожидание может быть рассчитано по формуле

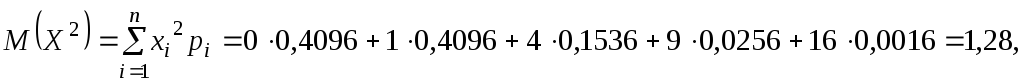
.

Так как случайная величина подчиняется биноминальному закону, то для расчета математического ожидания можно воспользоваться формулой

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-7qhrgL.png.

Дисперсия случайной величины может быть рассчитана по формулеhttps://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-MQPihA.pnghttps://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-tyLts_.png:

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-o09Ulm.png,



https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-44uEHy.png.

В данном случае дисперсию можно рассчитать по формуле

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-ZTzvtG.png.

Рассчитаем среднее квадратическое отклонение случайной величины по формуле

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-yoxLSG.png.

Составим функцию распределения случайной величины *Х*по формуле

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-RcNSc1.png.

1. https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-t5jJA1.png.
2. https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-y_foNo.png.
3. https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-KhFbvr.png.
4. https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-2WmDmw.png.
5. https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-1uGHnQ.png.
6. https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-5oVCrv.png.

Запишем функцию распределения

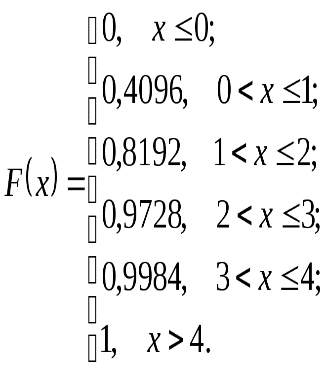
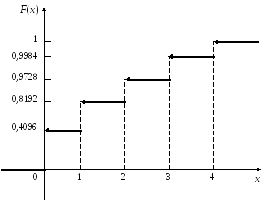


График функции распределения вероятностей имеет ступенчатый вид (рис. 7.3). Скачки равны вероятностям, с которыми случайная величина принимает возможные значения.

*Рис. 7.3*

**Пример 7.6.** Клиенты банка, не связанные друг с другом, не возвращают кредиты в срок с вероятностью 0,1. Составить закон распределения числа возвращенных в срок кредитов из 5 выданных. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

**Решение.** В качестве случайной величины *Х* выступает число кредитов, возвращенных клиентами в срок. Возможные значения, которые может принять случайная величина *Х*: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Вероятность того, что каждый клиент возвратит кредит в срок, постоянна и равна https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-H4DY5F.png. Вероятность того, что кредит не будет возвращен в срок, равнаhttps://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-4Z1060.png. Все 5 испытаний независимы. Случайная величина подчиняется биномиальному распределению с параметрамиhttps://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-uOl2ev.png;https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-Y7bnDj.png;https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-Vs0YvO.png;https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-aiO10n.png. Для составления закона распределения вычислим вероятности того, что случайная величина примет каждое из своих возможных значений. Расчет искомых вероятностей осуществляется по формуле Бернулли

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-zVT4xw.png,

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-CQKxyP.png,

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-UWr2F2.png,

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-0oOSCs.png,

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-5ixWhu.png,

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-0iLnVH.png,

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-KtCWcC.png.

Запишем закон распределения в виде таблицы

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| *Р* | 0,00001 | 0,00045 | 0,0081 | 0,0729 | 0,32805 | 0,59049 |

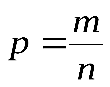
Математическое ожидание вычислим по формуле

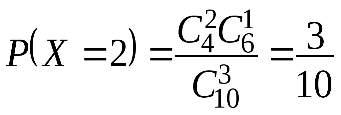
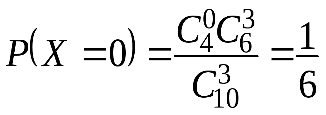
https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-y6XGGj.png.

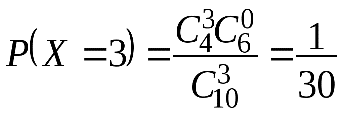
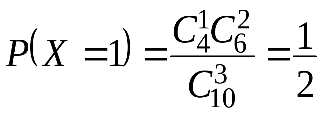
Дисперсию вычислим по формуле

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-nt5qHS.png.

**Пример 7.7.**Из 10 телевизоров на выставке оказались 4 телевизора фирмы «Сони». Наудачу для осмотра выбраны 3 телевизора. Составить закон распределения числа телевизоров фирмы «Сони» среди 3 отобранных.

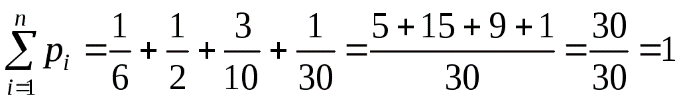
**Решение.** В качестве случайной величины *Х* выступает число телевизоров фирмы «Сони». Возможные значения, которые может принять случайная величина *Х*: 0, 1, 2, 3. Для составления закона распределения вычислим вероятности того, что случайная величина примет каждое из своих возможных значений. Эти вероятности можно рассчитать по формуле классической вероятности :

;

.

Запишем закон распределения

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | 0 | 1 | 2 | 3 |
| *Р* | https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-YLTNSK.png | https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-Kpslnx.png | https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-6DL1lZ.png | https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-hb5BIp.png |

Убедимся, что .

**Пример 7.8.**На двух автоматических станках производятся одинаковые изделия. Даны законы распределения числа бракованных изделий, производимых в течение смены на каждом из них:

*Х*: для первого

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | 0 | 1 | 2 | 3 |
| *Р* | 0,1 | 0,6 | 0,2 | 0,1 |

*Y*: для второго

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Y* | https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-7Nsp_l.png | 0 | 1 | 2 |
| *Р* | https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-D6kNGq.png | 0,5 | 0,3 | 0,2 |

Составить закон распределения числа производимых в течение смены бракованных изделий обоими станками. Проверить свойство математического ожидания суммы случайных величин.

**Решение.** Для того чтобы составить закон распределения *Х*+*Y* необходимо складыватьhttps://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-JbR6HD.png, а соответствующие им вероятности умножитьhttps://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-hSaew1.png:

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-y9Op9b.png;https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-UDUClP.png,

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-AqiWZT.png;https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-AaWpbN.png,

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-bE9gew.png;https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-Yf_rkq.png,

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-ka1_Uj.png;https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-HvNwba.png,

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-LJZlkp.png;https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-au8yzQ.png,

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-m8CKat.png;https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-cUHbP1.png,

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-x1slDY.png,

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-dFYnjH.png,

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-uclkUE.png,

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-LWWNjF.png,

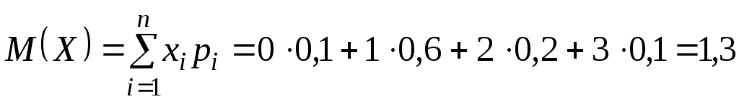
https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-rk0lS0.png,

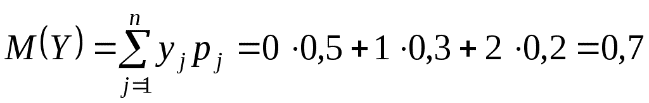
https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-nUqx5s.png.

Закон распределения запишем в виде таблицы

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х + Y* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| *P* | 0,05 | 0,33 | 0,3 | 0,23 | 0,07 | 0,02 |

Проверим свойство математического ожидания https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-XheQKM.png:

,

,

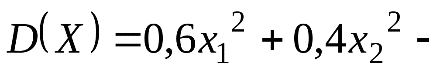
https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-o4Tdls.png,

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-boMPUa.png.

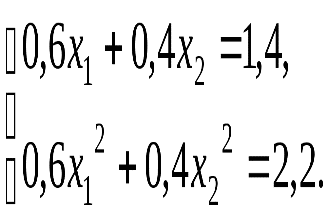
**Пример 7.9.**Дискретная случайная величина *Х* имеет только два возможных значения:https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-GbYpmx.pngиhttps://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-gw9KpV.png, причемhttps://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-b49c__.png. Вероятность того, что *Х* примет значениеhttps://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-73BHA8.png, равна 0,6. Найти закон распределения величины *Х*, если математическое ожиданиеhttps://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-WFhVjY.png;https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-HhyIeG.png.

**Решение.** Сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины равна единице, поэтому вероятность того, что *Х* примет значениеhttps://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-PqYPDy.png. Напишем закон распределения *Х*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *X* | https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-kcpC4J.png | https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-ISV8Mm.png |
| *P* | 0,6 | 0,4 |

Для того чтобы отыскать https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-o6Cavz.pngиhttps://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-5T9Zmu.pngнеобходимо составить два уравнения. Из условия задачи следует, чтоhttps://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-uBbieg.png,https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-yKL5kj.png.

Составим систему уравнений



Решив эту систему, имеем https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-eUGTCz.png;https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-3O4dz0.pngиhttps://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-51IfHA.png;https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-hCLvZc.png.

По условию https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-GqtvcN.png, поэтому задаче удовлетворяет лишь первое решение, т.е.https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-7OBJSx.png;https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-ja1eq8.png. Тогда закон распределения имеет вид

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *X* | 1 | 2 |
| *P* | 0,6 | 0,4 |

**Пример 7.10.**Случайные величиныhttps://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-46gfOD.pngиhttps://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-pfmvMU.pngнезависимы. Найти дисперсию случайной величиныhttps://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-tOlUA9.png, если известно, чтоhttps://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-kK4tUs.png,https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-YOuow9.png.

**Решение.** Так как имеют место свойства дисперсии

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-HseAIp.pngиhttps://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-w1s7oP.png, то получим

https://studfile.net/html/2706/959/html_w_dmLJHPIX.QaxH/img-k5RCAj.png