**ЛЕКЦИОННОЕ ЗАНЯТИЕ**

**Тема: «Свойства математического ожидания, дисперсии и стандартного отклонения»**

Закон распределения полностью характеризует случайную величину с вероятностной точки зрения. Однако при решении многих практических [задач](http://matica.org.ua/sdelat-zakaz) достаточно знать лишь некоторые Числовые параметры, выражающие наиболее характерные свойства (черты) закона распределения случайной величины. Такие числа носят название Числовых характеристик случайной величины.

*Математическим ожиданием (или средним значением)* (или ) *дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее возможных значений на соответствующие вероятности этих значений.*

Если дискретная случайная величина X принимает конечное число значений , то ее математическое ожидание  находится по формуле

 (3)

Если же дискретная случайная величина X принимает бесконечное (счетное) число значений, то

, (4)

При этом математическое ожидание существует, если ряд в правой части этой формулы абсолютно сходится, т. е. сходится ряд .

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X с плотностью вероятности , находится по формуле

, (5)

При этом математическое ожидание существует, если интеграл в правой части равенства абсолютно сходится (это значит, что сходится интеграл ).

*Дисперсией (рассеянием) (или )*

*случайной величины  Называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:*

*.*

Из определения вытекает часто используемая формула:

**.

Если  - Дискретная случайная величина, то ее дисперсия вычисляется по формуле:

, (т. е. ) (6)

В случае конечного числа значений, принимаемых случайной величиной X, и по формуле

, (т. е. ) (7)

В случае счетного числа значений.

Если X - непрерывная случайная величина С Плотностью , то

 (или ). (8)

*Средним квадратическим отклонением Случайной величины Называется величина .*

*Среднее квадратическим отклонение есть мера рассеяния значений случайной величины около ее математического ожидания.*

Кроме математического ожидания и дисперсии в теории вероятностей применяется еще ряд числовых характеристик, в частности, мода и медиана случайной величины.

***Модой Дискретной случайной величины X****называется ее наиболее вероятное значение.*

***Модой непрерывной случайной величины X****называется такое ее значение , при котором плотность распределения Имеет максимум, т. е. .*

На рис. 3 и 4 показана мода для дискретной и непрерывной случайной величины.

 

Рис. 3 Рис. 4

Если многоугольник распределения (кривая распределения) имеет два или несколько максимумов, то распределение называется **Двухмодальным или многомодальным**.

Иногда встречаются распределения, которые имеют минимум, но не имеют максимум. Такие распределения называются **Антимодальными**.

***Медианой непрерывной случайной величины X***

***(обозначение:)****называется такое ее значение , для которого одинаково вероятно, окажется ли случайная величина Меньше  или больше, т. е.*

*.*(9)

Геометрически вертикальная прямая *,*Проходящая через точку с абсциссой, равной **, делит площадь фигуры под кривой распределения на две равные части (рис. 5). Каждая из этих площадей равна , т. к. площадь, ограниченная кривой распределения, равна единице. Поэтому функция распределения в точке  равна , т. е. **.



Рис. 5

Для дискретной случайной величины медиана обычно не определяется.

Математическое ожидание и дисперсия - чаще всего применяемые числовые характеристики случайной величины. Они характеризуют самые важные черты распределения: его положение и степень разбросанности. **Математическое ожидание часто называют просто средним значением** случайной величины. **Дисперсия случайной величины - характеристика рассеивания, разбросанности случайной величины** около её математического ожидания.

Во многих задачах практики полная, исчерпывающая характеристика случайной величины - закон распределения - или не может быть получена, или вообще не нужна. В этих случаях ограничиваются приблизительным описанием случайной величины с помощью числовых характеристик.

**Математическое ожидание дискретной случайной величины**

Подойдём к понятию математического ожидания. Пусть масса некоторого вещества распределена между точками оси абсцисс x1, x2, ..., xn. При этом каждая материальная точка имеет соответствующую ей массу с вероятностью из p1, p2, ..., p*n*. Требуется выбрать одну точку на оси абсцисс, характеризующую положение всей системы материальных точек, с учётом их масс. Естественно в качестве такой точки взять центр массы системы материальных точек. Это есть среднее взвешенное значение случайной величины X, в которое абсцисса каждой точки xi входит с "весом", равным соответствующей вероятности. Полученное таким образом среднее значение случайной величины X называется её математическим ожиданием.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех возможных её значений на вероятности этих значений:



**Пример 1.** Организована беспроигрышная лотерея. Имеется 1000 выигрышей, из них 400 по 10 руб. 300 - по 20 руб. 200 - по 100 руб. и 100 - по 200 руб. Каков средний размер выигрыша для купившего один билет?

Решение. Средний выигрыш мы найдём, если общую сумму выигрышей, которая равна 10\*400 + 20\*300 + 100\*200 + 200\*100 = 50000 руб, разделим на 1000 (общая сумма выигрышей). Тогда получим 50000/1000 = 50 руб. Но выражение для подсчёта среднего выигрыша можно представить и в следующем виде:



С другой стороны, в данных условиях размер выигрыша является случайной величиной, которая может принимать значения 10, 20, 100 и 200 руб. с вероятностями, равными соответственно 0,4; 0,3; 0,2; 0,1. Следовательно, ожидаемый средний выигрыш равен сумме произведений размеров выигрышей на вероятности их получения.

**Пример 2.** Издатель решил издать новую книгу. Продавать книгу он собирается за 280 руб., из которых 200 получит он сам, 50 - книжный магазин и 30 - автор. В таблице дана информация о затратах на издание книги и вероятности продажи определённого числа экземпляров книги.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Число проданных экземпляров | Вероятность | Затраты |
| 500 | 0,20 | 225000 |
| 1000 | 0,40 | 250000 |
| 2000 | 0,25 | 300000 |
| 3000 | 0,10 | 350000 |
| 4000 | 0,05 | 400000 |

Найти ожидаемую прибыль издателя.

Решение. Случайная величина "прибыль" равна разности доходов от продажи и стоимости затрат. Например, если будет продано 500 экземпляров книги, то доходы от продажи равны 200\*500=100000, а затраты на издание 225000 руб. Таким образом, издателю грозит убыток размером в 125000 руб. В следующей таблице обобщены ожидаемые значения случайной величины - прибыли:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Число | Прибыль xi | Вероятность pi | xipi |
| 500 | -125000 | 0,20 | -25000 |
| 1000 | -50000 | 0,40 | -20000 |
| 2000 | 100000 | 0,25 | 25000 |
| 3000 | 250000 | 0,10 | 25000 |
| 4000 | 400000 | 0,05 | 20000 |
| Всего: |  | 1,00 | 25000 |

Таким образом, получаем математическое ожидание прибыли издателя:

.

**Свойства математического ожидания**

Рассмотрим свойства математического ожидания.

**Свойство 1.**Математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной:



**Свойство 2.**Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:



**Свойство 3.**Математическое ожидание суммы (разности) случайных величин равно сумме (разности) их математических ожиданий:



**Свойство 4.**Математическое ожидание произведения случайных величин равно произведению их математических ожиданий:



**Свойство 5.**Если все значения случайной величины X уменьшить (увеличить) на одно и то же число С, то её математическое ожидание уменьшится (увеличится) на то же число:



**Когда нельзя ограничиваться только математическим ожиданием**

В большинстве случаев только математическое ожидание не может в достаточной степени характеризовать случайную величину.

Пусть случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения:

|  |  |
| --- | --- |
| Значение X | Вероятность |
| -0,1 | 0,1 |
| -0,01 | 0,2 |
| 0 | 0,4 |
| 0,01 | 0,2 |
| 0,1 | 0,1 |

|  |  |
| --- | --- |
| Значение Y | Вероятность |
| -20 | 0,3 |
| -10 | 0,1 |
| 0 | 0,2 |
| 10 | 0,1 |
| 20 | 0,3 |

Математические ожидания этих величин одинаковы - равны нулю:





Однако характер распределения их различный. Случайная величина X может принимать только значения, мало отличающиеся от математического ожидания, а случайная величина Y может принимать значения, значительно отклоняющиеся от математического ожидания. Аналогичный пример: средняя заработная плата не даёт возможности судить об удельном весе высоко- и низкооплачиваемых рабочих. Иными словами, по математическому ожиданию нельзя судить о том, какие отклонения от него, хотя бы в среднем, возможны. Для этого нужно найти дисперсию случайной величины.

**Дисперсия дискретной случайной величины**

**Дисперсией** дискретной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения её от математического ожидания:



Средним квадратическим отклонением  случайной величины X называется арифметическое значение квадратного корня её дисперсии:

.

**Пример 3.**Вычислить дисперсии и средние квадратическим отклонениям случайных величин X и Y, законы распределения которых приведены в таблицах выше.

Решение. Математические ожидания случайных величин X и Y, как было найдено выше, равны нулю. Согласно формуле дисперсии, при Е(х)=Е(y)=0 получаем:





Тогда средние квадратические отклонения случайных величин X и Y составляют

,

.

Таким образом, при одинаковых математических ожиданиях дисперсия случайной величины X очень мала, а случайной величины Y - значительная. Это следствие различия в их распределении.

**Пример 4.** У инвестора есть 4 альтернативных проекта инвестиций. В таблице обобщены данные об ожидаемой прибыли в этих проектах с соответствующей вероятностью.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Проект 1 | Проект 2 | Проект 3 | Проект 4 |
| 500, P=1 | 1000, P=0,5 | 500, P=0,5 | 500, P=0,5 |
|  | 0, P=0,5 | 1000, P=0,25 | 10500, P=0,25 |
|  |  | 0, P=0,25 | 9500, P=0,25 |

Найти для каждой альтернативы математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение. Покажем, как вычисляются эти величины для 3-й альтернативы:

.



.

В таблице обобщены найденные величины для всех альтернатив.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Проект 1 | Проект 2 | Проект 3 | Проект 4 |
| μ | 500 | 500 | 500 | 500 |
| σ² | 0 | 2500 | 1250 | 500000 |
| σ | 0 | 500 | 354 | 7071 |

У всех альтернатив одинаковы математические ожидания. Это означает, что в долгосрочном периоде у всех - одинаковые доходы. Стандартное отклонение можно интерпретировать как единицу измерения риска - чем оно больше, тем больше риск инвестиций. Инвестор, который не желает большого риска, выберет проект 1, так как у него наименьшее стандартное отклонение (0). Если же инвестор отдаёт предпочтение риску и большим доходам в короткий период, то он выберет проект наибольшим стандартным отклонением - проект 4.

**Свойства дисперсии**

Приведём свойства дисперсии.

**Свойство 1.**Дисперсия постоянной величины равна нулю:

.

**Свойство 2.**Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его при этом в квадрат:

.

**Свойство 3.**Дисперсия случайной величины равна математическому ожиданию квадрата этой величины, из которого вычтен квадрат математического ожидания самой величины:

,

где .

**Свойство 4.**Дисперсия суммы (разности) случайных величин равна сумме (разности) их дисперсий:



**Пример 5.** В урне 6 белых и 4 чёрных шара. Из урны вынимают 3 шара. Число белых шаров среди вынутых шаров является дискретной случайной величиной X. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Решение. Случайная величина X может принимать значения 0, 1, 2, 3. Соответствующие им вероятности можно вычислить по [**правилу умножения вероятностей**](https://function-x.ru/probabilities2.html). Закон распределения случайной величины:

Отсюда математическое ожидание данной случайной величины:

M(X) = 3/10 + 1 + 1/2 = 1,8.

Дисперсия данной случайной величины:

D(X) = 0,3 + 2 + 1,5 − 3,24 = 0,56.

**Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины**

Для непрерывной случайной величины механическая интерпретация математического ожидания сохранит тот же смысл: центр массы для единичной массы, распределённой непрерывно на оси абсцисс с плотностью f(x). В отличие от дискретной случайной величиной, у которой аргумент функции xi изменяется скачкообразно, у непрерывной случайной величины аргумент меняется непрерывно. Но математическое ожидание непрерывной случайной величины также связано с её средним значением.

**Чтобы находить математическое ожидание и дисперсию непрерывной случайной величины, нужно находить**[*определённые интегралы*](https://function-x.ru/integral4.html). Если дана функция плотности непрерывной случайной величины, то она непосредственно входит в подынтегральное выражение. Если дана функция распределения вероятностей, то, дифференцируя её, нужно найти функцию плотности.

Арифметическое среднее всех возможных значений непрерывной случайной величины называется её **математическим ожиданием**, обозначаемым  или .

**Математическое ожидание ** непрерывной случайной величины** Х, плотностью вероятности которой является функция f(x), находится как величина интеграла

,

если он сходится абсолютно.

**Дисперсией непрерывной случайной величины** называется величина интеграла

,

если он сходится.

Среднее квадратичное отклонение непрерывной случайной величины определяется как арифметическое значение квадратного корня из дисперсии.

**Пример 6.** Дана функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины:



Найти математическое ожидание и дисперсию непрерывной случайной величины.

Решение. Найдём функцию плотности вероятностей случайной величины. Дифференцируя функцию F(x):



Таким образом, функция плотности:



Математическим ожиданием данной непрерывной случайной величины будет следующий интеграл:

.

Этот интеграл найдём, [**интегрируя по частям**](https://function-x.ru/integral102.html). Для этого ведём следующие обозначения:



Таким образом, находим математическое ожидание:



Дисперсией непрерывной случайной величины будет следующий интеграл:

.

Его также найдём по частям. Введём обозначения:

.

Тогда



Вновь интегрируем по частям. Вводим обозначения:



И находим дисперсию данной непрерывной случайной величины:



**Пример 7.**Дана непрерывная случайная величина. Её плотность вероятности  при  и  при остальных значениях x. Найти её математическое ожидание и дисперсию.

Решение. Сначала определим параметр с. Разбивая отрезок интегрирования на части, получаем



так как остальные два интеграла равны нулю вследствие равенства нулю плотности вероятности на этих интервалах. Следовательно,

,

откуда .

При  находим математическое ожидание искомой случайной величины:



(пределы интегрирования 0 и 10 установлены по тем же соображениям, что и при нахождении параметра с). Дисперсию вычисляем при a=5 и f(x)=0,1:



**Дисперсия**случайной величины – это один из основных показателей в статистике. Он отражает меру разброса данных вокруг средней арифметической.

Сейчас небольшой экскурс в теорию вероятностей, которая лежит в основе математической статистики. Как и матожидание, дисперсия является важной характеристикой случайной величины. Если матожидание отражает центр случайной величины, то дисперсия дает характеристику разброса данных вокруг центра.

**Формула дисперсии в теории вероятностей имеет вид:**



То есть дисперсия — это математическое ожидание отклонений от математического ожидания.

На практике при анализе выборок математическое ожидание, как правило, не известно. Поэтому вместо него используют оценку – среднее арифметическое. Расчет дисперсии производят по формуле:



где

s2 – выборочная дисперсия, рассчитанная по данным наблюдений,

X – отдельные значения,

X̅– среднее арифметическое по выборке.

Стоит отметить, что у такого расчета дисперсии есть недостаток – она получается смещенной, т.е. ее математическое ожидание не равно истинному значению дисперсии.

Полезно знать [**математическое ожидание**](http://www.mathprofi.ru/sluchainaya_velichina.html), однако только этой характеристики ещё не достаточно для исследования случайной величины. Представим двух стрелков, которые стреляют по мишени. Один стреляет метко и попадает близко к центру, а другой… просто развлекается и даже не целится. Но что забавно, его средний результат будет точно таким же, как и у первого стрелка! Эту ситуацию условно иллюстрируют следующие случайные величины:



«Снайперское» математическое ожидание равно , однако и у «интересной личности»:  – оно тоже нулевое!

Таким образом, возникает потребность количественно оценить, насколько далеко  рассеяны пули (значения случайной величины) относительно центра мишени (математического ожидания). Ну а рассеяние с латыни переводится не иначе, как **дисперсия**.

Посмотрим, как определяется эта числовая характеристика на одном из примеров 1-й части урока:


Там мы нашли неутешительное математическое ожидание  этой игры, и сейчас нам предстоит вычислить её дисперсию, которая **обозначается** через .

Выясним, насколько далеко «разбросаны» выигрыши/проигрыши относительно среднего значения. Очевидно, что для этого нужно вычислить разности  между значениями случайной величины и её математическим ожиданием:

–5 – (–0,5) = –4,5
2,5 – (–0,5) = 3
10 – (–0,5) = 10,5

Теперь вроде бы нужно просуммировать результаты, но этот путь не годится – по той причине, что колебания влево будут взаимоуничтожаться с колебаниями вправо. Так, например, у стрелка-«любителя» (пример выше) разности составят ,  и при сложении дадут ноль, поэтому никакой оценки рассеяния его стрельбы мы не получим.

Чтобы обойти эту неприятность можно рассмотреть [**модули**](http://www.mathprofi.ru/goryachie_formuly.pdf) разностей, но по техническим причинам прижился подход, когда их возводят в квадрат. Решение удобнее оформить таблицей:

И здесь напрашивается вычислить средневзвешенное значение квадратов отклонений. А это ЧТО такое? Это их [**математическое ожидание**](http://www.mathprofi.ru/sluchainaya_velichina.html), которое и является мерилом рассеяния:

  – **определение** дисперсии. Из определения сразу понятно, что **дисперсия не может быть отрицательной** – возьмите на заметку для практики!

Вспоминаем, как находить матожидание. Перемножаем квадраты разностей на соответствующие вероятности (продолжение таблицы):
 – образно говоря, это «сила тяги»,
и суммируем результаты:


Не кажется ли вам, что на фоне выигрышей  результат получился великоватым? Всё верно – мы возводили в квадрат, и чтобы вернуться в размерность нашей игры, нужно извлечь квадратный корень. Данная величина называется **средним квадратическим отклонением** и обозначается греческой буквой «сигма»:


Иногда это значение называют **стандартным отклонением**.

В чём его смысл? Если мы отклонимся от математического ожидания  влево и вправо на среднее квадратическое отклонение:

 – то на этом интервале будут «сконцентрированы» наиболее вероятные значения случайной величины. Что мы, собственно, и наблюдаем: 

Однако так сложилось, что при анализе рассеяния почти всегда оперируют понятием дисперсии. Давайте разберёмся, что она означает применительно к играм. Если в случае со стрелками речь идёт о «кучности» попаданий относительно центра мишени, то здесь дисперсия характеризует две вещи:

Во-первых, очевидно то, что при увеличении ставок, дисперсия тоже возрастает. Так, например, если мы увеличим  в 10 раз, то математическое ожидание увеличится в 10 раз, а дисперсия – в 100 раз Но, заметьте, что сами-то правила игры не изменились! Изменились лишь ставки, грубо говоря, раньше мы ставили 10 рублей, теперь 100.

Второй, более интересный момент состоит в том, что дисперсия характеризует стиль игры. Мысленно зафиксируем игровые ставки на каком-то определённом уровне, и посмотрим, что здесь к чему:

Игра с низкой дисперсией – это осторожная игра. Игрок склонен выбирать самые надёжные схемы, и в ситуации неопределённости не ставит слишком большие деньги. Например, система «красное/чёрное» в рулетке (см. Пример 4 статьи [***Случайные величины***](http://www.mathprofi.ru/sluchainaya_velichina.html)).

Игра с высокой дисперсией. Её часто называют дисперсионной игрой. Это авантюрный или агрессивный стиль игры, где игрок выбирает «адреналиновые» схемы. Вспомним хотя бы  [**«Мартингейл»**](http://www.mathprofi.ru/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli.html), в котором на кону оказываются суммы, на порядки превосходящие «тихую» игру предыдущего пункта.

Показательна ситуация в покере: здесь есть так называемые тайтовые игроки, которые склонны осторожничать и «трястись» над своими игровыми средствами (банкроллом). Неудивительно, что их банкролл не подвергается значительным колебаниям (низкая дисперсия). Наоборот, если у игрока высокая дисперсия, то это агрессор. Он часто рискует, делает крупные ставки и может, как сорвать огромный банк, так и програться в пух и прах .

То же самое происходит на Форексе, других биржах и так далее – примеров масса.

Причём, во всех случаях не важно – на копейки ли идёт игра или на тысячи долларов. На любом уровне есть свои низко- и высокодисперсионные игроки. Ну а за средний выигрыш, как мы помним, «отвечает» [**математическое ожидание**](http://www.mathprofi.ru/sluchainaya_velichina.html).

Наверное, вы заметили, что нахождение дисперсии – есть процесс длительный и кропотливый. Но математика щедрА:

### ****Формула для нахождения дисперсии****



Данная формула выводится непосредственно из определения дисперсии, и мы незамедлительно пускаем её в оборот. Скопирую сверху табличку с нашей игрой:

и найденное матожидание .

Вычислим дисперсию вторым способом. Сначала найдём математическое ожидание  – квадрата случайной величины . По [**определению математического ожидания**](http://www.mathprofi.ru/sluchainaya_velichina.html):


В данном случае:


Таким образом, по формуле:


Как говорится, почувствуйте разницу. И на практике, конечно, лучше применять формулу (если иного не требует условие).

Осваиваем технику решения и оформления:

Пример 9

Дискретная случайная величина задана своим законом распределения:



Найти её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Эта задача встречается повсеместно, и, как правило, идёт без содержательного смысла.
Можете представлять себе несколько лампочек с числами, которые загораются в дурдоме с определёнными вероятностями :)

**Решение**: Основные вычисления удобно свести в таблицу. Сначала в  верхние две строки записываем исходные данные. Затем рассчитываем произведения , затем  и, наконец, суммы в правом столбце:


Собственно, почти всё готово. В третьей строке нарисовалось готовенькое математическое ожидание: .

Дисперсию вычислим по формуле:


И, наконец, среднее квадратическое отклонение:
 – лично я обычно округляю до 2 знаков после запятой.

Все вычисления можно провести на калькуляторе, а ещё лучше – в Экселе:

вот здесь уже трудно ошибиться :)

**Ответ**: 